Scuole italiane all'estero (Americhe) 2006 – PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ *, dove a, b sono parametri reali.*

a)

Fra tali curve determinare quella che passa per i punti di coordinate (2,3) e (- 2,5) e indicarla con γ*.*

Imponiamo il passaggio per i due punti:

$$\begin{cases} 3 = 4a + \dfrac{b}{2} \\ 5 = 4a - \dfrac{b}{2} \end{cases} , \quad 8 = 8a: \quad a = 1 \; e \; quindi \;\; b = -2$$

La curva γ ha quindi equazione: $y = x^2 - \frac{2}{x}$.

b)

Studiare la curva γ *e disegnarne l'andamento, dopo aver trovato, in particolare, le coordinate del suo punto di minimo relativo e del suo flesso.*

$$\boldsymbol{y = f(x) = x^2 - \frac{2}{x}}$$

Dominio: $x \neq 0$

La funzione non è pari né dispari: $f(-x) = x^2 + \frac{2}{x}$ che è diverso sia da f(x) che da –f(x).

Intersezioni con y=0: $x^3 = 2, \;\; x = \sqrt[3]{2}$.

Segno: $y > 0 \quad se \quad \frac{x^3-2}{x} > 0: \quad x < 0 \quad vel \quad x > \sqrt[3]{2}$

Limiti:
per x che tende a più o meno infinito la funzione tende a più infinito. Non ci sono asintoti orizzontali né obliqui (la funzione è razionale fratta ed il grado del numeratore non supera di 1 il grado del denominatore).
Per x che tende a zero più la funzione tende a meno infinito e per x che tende a zero meno tende a più infinito: x=0 è asintoto verticale.

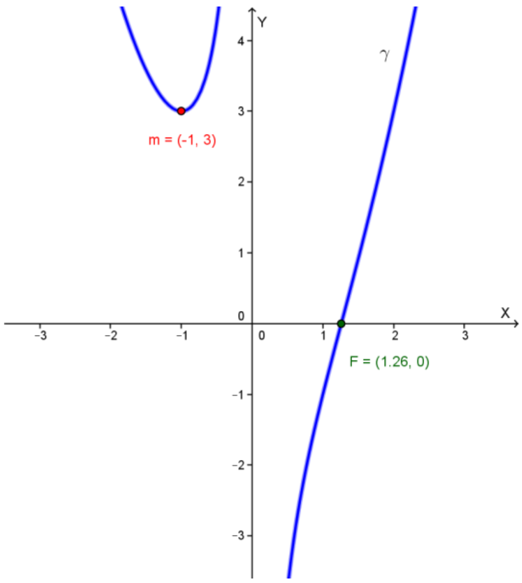
Derivata prima:

$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} > 0 \quad se \quad x^3 + 1 > 0, x > -1$: il grafico è decrescente da meno infinito a -1 e crescente da -1 a 0 e da 0 a più infinito; x=-1 è punto di minimo relativo, con ordinata 3.

Derivata seconda:

$f''(x) = 2 - \frac{4}{x^3} > 0 \quad se \quad \frac{2x^3-4}{x^3} > 0$; il numeratore è positivo per $x > \sqrt[3]{2}$ ed il denominatore per x>0; pertanto $f''(x) > 0 \ per\ x < 0 \quad vel \quad x > \sqrt[3]{2}$; il grafico volge la concavità verso l'alto in tali intervalli e verso il basso nella parte rimanente del dominio; $x = \sqrt[3]{2}$ è punto di flesso, con ordinata $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$.

Grafico:



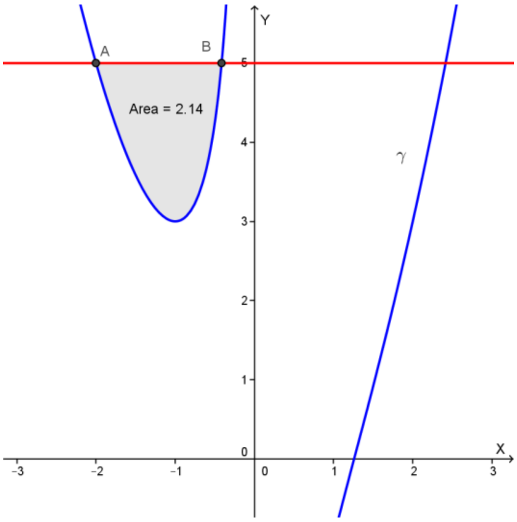
c)

Calcolare l'area della regione piana delimitata dalla curva γ e dalla retta $y = 5$.

Cerchiamo le intersezioni della curva con la retta:

$\begin{cases} y = x^2 - \frac{2}{x} \\ y = 5 \end{cases}$; $\quad x^2 - \frac{2}{x} = 5$; $\quad x^3 - 5x - 2 = 0$. Le eventuali radici intere sono da ricercare fra i divisori di 2; si verifica che una radice è x=-2, quindi, abbassando di grado mediante la regola di Ruffini abbiamo: $(x+2)(x^2 - 2x - 1) = 0; \quad x^2 - 2x - 1 = 0$ se: $x = 1 \pm \sqrt{2}$ e a noi interessa la soluzione negativa.

Abbiamo la seguente situazione grafica



L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_{-2}^{1-\sqrt{2}} \left[5 - \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)\right] dx = \int_{-2}^{1-\sqrt{2}} \left[5 - x^2 + \frac{2}{x}\right] dx = \left[5x - \frac{1}{3}x^3 + 2\ln|x|\right]_{-2}^{1-\sqrt{2}} =$$

$$= \cdots = 10 - \frac{10\sqrt{2}}{3} + 2ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) \cong 2.14\ u^2 = Area$$

d)

Utilizzando il disegno di γ, trovare quante soluzioni ammette l'equazione $x^3 - kx - 2 = 0$, per $-2 < x < 2$, essendo k un parametro reale.

Dobbiamo discutere il seguente sistema misto:

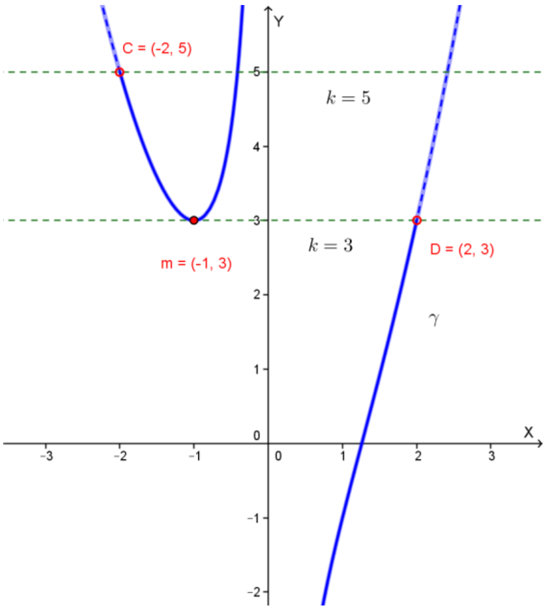
$$\begin{cases} x^3 - kx - 2 = 0 \\ -2 < x < 2 \\ k \in R \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2}{x} = k \\ -2 < x < 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x} \\ y = k \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Cerchiamo le rette caratteristiche (parallele all'asse x):
retta per C=(-2; 5): k=5;
retta per il minimo m=(-1; 3): k=3;
retta per D=(2; 3): k=3.

Osservando il grafico si hanno le seguenti soluzioni:

per k<3: 1 soluzione; per k=3: 2 soluzioni coincidenti (x=-1); per 3<k<5: 2 soluzioni distinte (negative); per k=5: nessuna soluzione (x=-2 non è accettabile); per k>5: 1 soluzione (negativa).

Si ha la seguente situazione grafica:



Sintetizzando l'equazione data ammette le seguenti soluzioni:

1 soluzione: per $k < 3 \quad e\ k \geq 5$;

2 soluzioni: per $3 \leq k < 5$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria