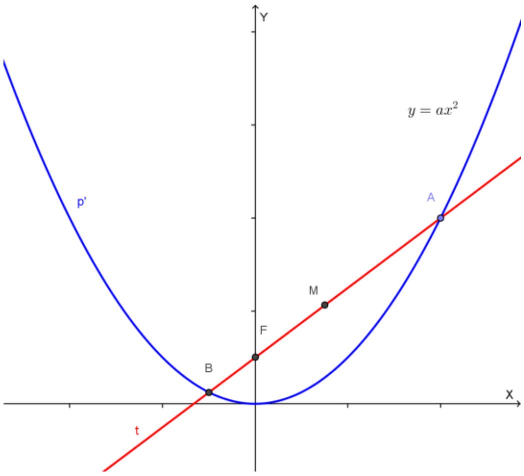
# Scuole italiane all'estero (Americhe) 2006 – PROBLEMA 2

*Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p' di equazione* $y = ax^2$, *dove* $a$ *è un numero reale positivo assegnato.*

## a)

*Condotta una generica retta t per il fuoco F della parabola p' e chiamato M il punto medio del segmento che p' intercetta su t, trovare le funzioni x(k) ed y(k) che forniscono, nell'ordine, l'ascissa e l'ordinata di M per mezzo della pendenza k della retta t.*




Il fuoco F della parabola p' di equazione $y = ax^2$ ha le seguenti coordinate:
$x_F = -\frac{b}{2a} = 0$ , $y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1}{4a}$ : $F = \left(0; \frac{1}{4a}\right)$.
La generica retta t passante per F (che interseca p' in due punti) ha equazione:
$y - \frac{1}{4a} = kx$, $y = kx + \frac{1}{4a}$.

Cerchiamo le intersezioni A e B di t con p':

$$\begin{cases} y = kx + \frac{1}{4a} \\ y = ax^2 \end{cases} ; \quad ax^2 = kx + \frac{1}{4a} \;,\; 4a^2x^2 - 4akx - 1 = 0 \;,\; x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Quindi: $x_M = \frac{4ak}{8a^2} = \frac{k}{2a}$ e perciò: $y_M = kx + \frac{1}{4a} = \frac{k^2}{2a} + \frac{1}{4a}$. Si ha perciò:

$x_M = \frac{k}{2a}$ $e$ $y_M = \frac{k^2}{2a} + \frac{1}{4a}$.

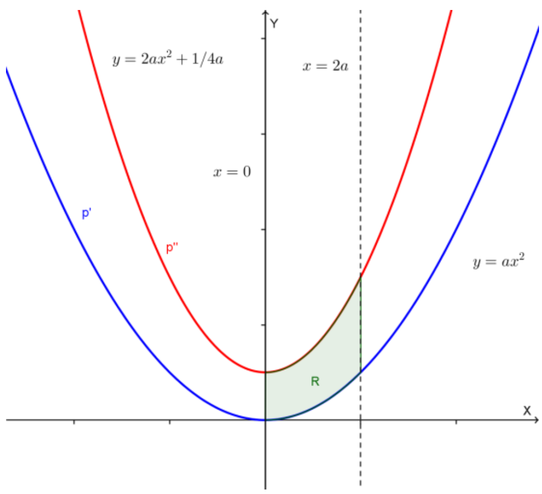
## b)

*Considerate le equazioni x=x(k) e y=y(k) ed eliminato il parametro k fra esse, si trova l'equazione di una seconda parabola p" (è chiamata luogo geometrico del punto M al variare di t nel fascio di centro F).*

$$p'': \begin{cases} x = \dfrac{k}{2a} \\ y = \dfrac{k^2}{2a} + \dfrac{1}{4a} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} k = 2ax \\ y = 2ax^2 + \dfrac{1}{4a} \end{cases} \quad : \quad y = 2ax^2 + \frac{1}{4a}$$

## c)

*Calcolare l'area A della regione piana R delimitata dalle parabole p' e p" e dalle rette di equazioni x=0 ed x=2a.*




L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area(R) = A = \int_0^{2a} \left[2ax^2 + \frac{1}{4a} - ax^2\right] dx = \int_0^{2a} \left[ax^2 + \frac{1}{4a}\right] dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{4a}x\right]_0^{2a} =$$

$$= \frac{8}{3}a^4 + \frac{1}{2} = A$$

## d)

*Trovare il valore di a per il quale l'area A è uguale a 13/24 e, in corrispondenza di tale valore, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse y.*

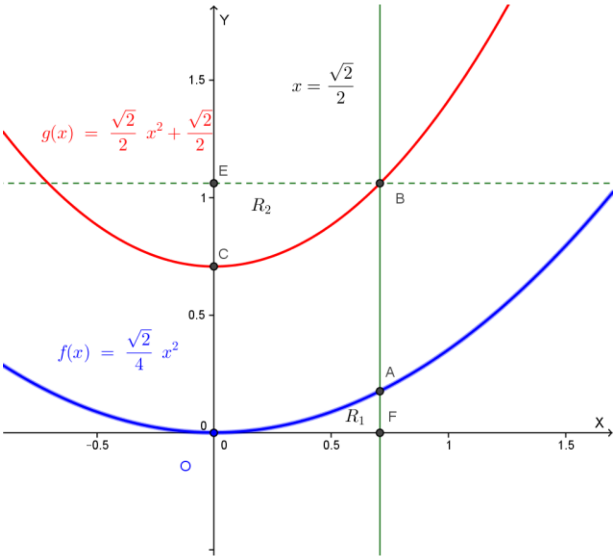
Dobbiamo risolvere la seguente equazione in a:

$$\frac{8}{3}a^4 + \frac{1}{2} = \frac{13}{24}, \quad 64a^4 = 1 \ , \ a = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (essendo\ a > 0)$$

Per tale valore di a le due parabole hanno equazione:

$$p': y = f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 \ , \quad p'': y = g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Osserviamo il seguente grafico:




Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del cilindro generato dalla rotazione attorno all'asse y del rettangolo OFBE i volumi generati dalla rotazione sempre attorno all'asse y delle due regioni $R_1\ ed\ R_2$.

Alternativamente (ed in modo più veloce), il volume richiesto può essere calcolato utilizzando il metodo dei gusci cilindrici (si veda la seguente pagina di matefilia: [http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf](http://www.matefilia.it/argomen/gusci-cilindrici/metodo-gusci-cilindrici.pdf) ):

$$V = 2\pi \int_0^{2a} x[g(x) - f(x)]\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]dx = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)dx = 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{16}x^4 + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{64} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{9}{32}\pi\sqrt{2}\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria