Scuole italiane all'estero (Americhe) 2006 – Quesiti

QUESITO 1

Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = sen^2(2x)$.

Risulta: $f'(x) = 2sen(2x)\cos(2x)\,(2) = 4sen(2x)\cos(2x) = 2sen(4x) = f'(x)$

QUESITO 2

Si consideri la seguente proposizione:
"Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali".
Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data.

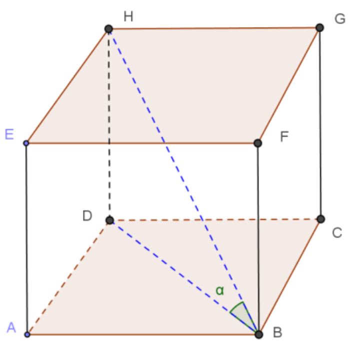
La proposizione è FALSA. Infatti se i seni di due angoli sono uguali gli angoli possono essere uguali (ed in tal caso i triangoli sarebbero congruenti) oppure supplementari (in tal caso i triangoli non sono congruenti).

QUESITO 3

Si indichi con α *l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di* α*, espressa in radianti:*

[A] è arcsen $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *;*   *[B] è arccos* $\frac{\sqrt{3}}{6}$ *;*   *[C] è arctg* $\frac{\sqrt{6}}{3}$ *;*   *[D] un valore diverso.*

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.



L'angolo α che la diagonale BH forma con la faccia ABCD equivale all'angolo fra BH e la diagonale BD della faccia ABCD. Detto s lo spigolo del cubo, risulta:

$$BH = s\sqrt{3}, \quad BD = s\sqrt{2}, \quad DH = s$$

Si ha:

$$sen(\alpha) = \frac{DH}{BH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}: \quad \alpha = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

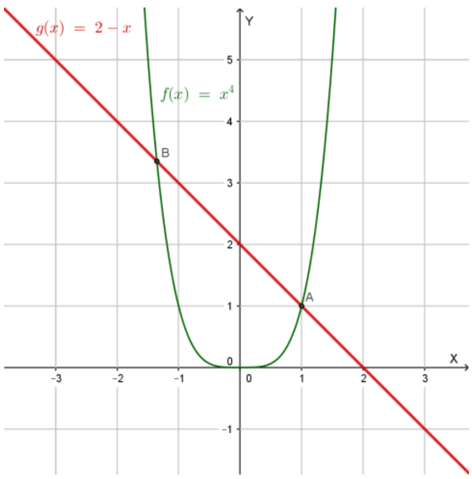
La risposta esatta è la è la [A].

QUESITO 4

Considerata l'equazione: $x^4 + x - 2 = 0$ *, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione razionale.*

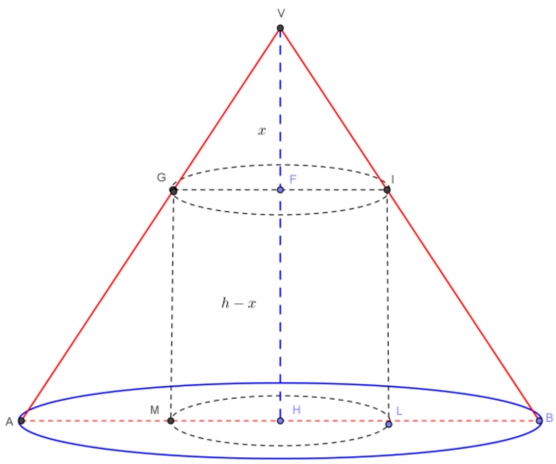
Le eventuali radici razionali sono da ricercarsi fra i divisori del termine noto, che sono: +1, -1, +2, -2. Si verifica facilmente che l'unica soluzione è x=1.

Siccome l'equazione può essere scritta nella forma $x^4 = 2 - x$, le soluzioni dell'equazioni equivalgono alle ascisse dei punti di intersezione fra le curve di equazione $f(x) = x^4$ e $g(x) = 2 - x$. Come si può osservare dal grafico seguente abbiamo due soluzioni, di cui solo una (x=1), in base a quanto detto precedentemente, è razionale.



QUESITO 5

In un cono equilatero di apotema a *inscrivere il cilindro circolare retto di volume massimo.*



Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot FG^2 \cdot (h - x)$$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x ($r = raggio\ cono = \frac{a}{2}$):

$$AH:FG = VH:VF\ ,\quad r:FG = h:x,\quad FG = \frac{x \cdot r}{h}$$

Quindi:

$$V(cilindro) = \ \pi \cdot \left(\frac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = x^2 \cdot (h - x),\quad con\ \ 0 \leq x \leq h$$

Il problema è di facile soluzione con l'uso delle derivate, proponiamo un metodo elementare.
Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: a=x e b=h-x .

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}$, $x = 2h - 2x$, $x = \frac{2}{3}h$.

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono.

L'altezza del cono in funzione dell'apotema a è data da: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, quindi:
il cilindro di volume massimo ha altezza pari ad $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

QUESITO 6

La funzione reale di variabile reale f(x) ammette derivata nulla in tutti i punti di un intervallo J, tranne che nel punto a di J, dove la funzione non è continua. Si può concludere che la funzione f(x) è costante in J? Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

La risposta è NO. Si consideri per esempio la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \leq x < 2 \\ -1 & se\ 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

Tale funzione è definita nell'intervallo J=[0; 3], è derivabile con derivata nulla in tutti i punti dell'intervallo escluso a=2, ma non è chiaramente costante in J.

Se la funzione fosse stata continua in tutti i punti di J, con derivata sempre nulla, allora (per un corollario del teorema di Lagrange) sarebbe stata costante su J.

QUESITO 7

Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Esso è uguale a:

[A] e^2 *;* *[B]* $\frac{1}{e^2}$ *;* *[C]* $\sqrt{e}$ *;* *[D]* $\frac{1}{\sqrt{e}}$ *,*

dove "e" è il numero di Nepero. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Tenendo presente il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{-2}{x}\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{-2}{x}}\right]^{\left(-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

La risposta esatta è la [D].

Con la collaborazione di Angela Santamaria