

Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2006 – PROBLEMA 2

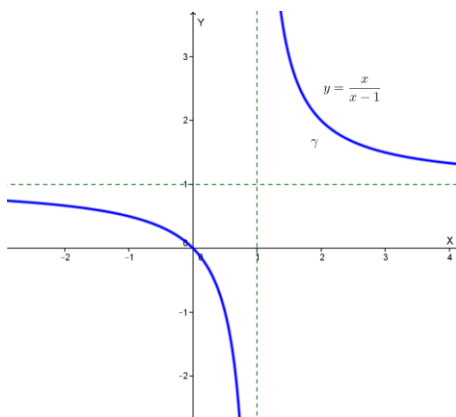
La somma di due numeri x e y è uguale al loro prodotto.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x,y) :

1)

Si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x,y)$ che soddisfano al problema.

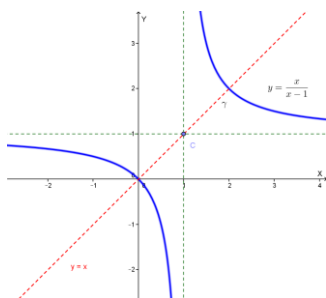
Risulta: $x + y = xy$, $y = \frac{x}{x-1}$ che è una funzione omografica di centro $(1; 1)$ e passante per l'origine degli assi cartesiani. Il suo grafico è il seguente:



2)

Quali proprietà di simmetria di γ sono deducibili dalla commutatività della addizione e della moltiplicazione? Il luogo γ ha altre simmetrie?

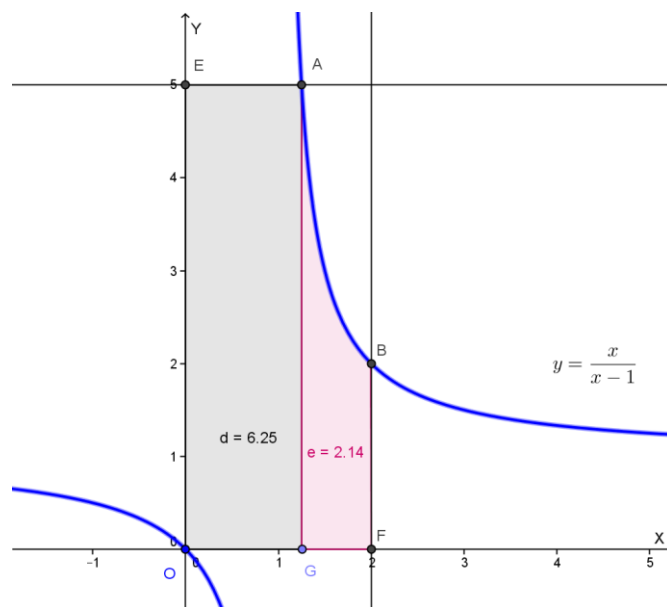
Siccome $x+y=y+x$ e $xy=yx$ possiamo dire che scambiando x con y il luogo non cambia: ciò vuol dire che il grafico di γ è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y=x$. Il luogo è anche simmetrico rispetto al punto $C=(1; 1)$.



3)

Si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ , dagli assi coordinati e dalle rette $x=2$ e $y=5$ e se ne dia un valore approssimato.

La regione richiesta OFBAE è indicata nella seguente figura:



Cerchiamo l'intersezione A fra la retta $y=5$ e la curva γ :

$$A: \begin{cases} y = 5 \\ y = \frac{x}{x-1} \end{cases} ; 5 = \frac{x}{x-1} ; 5x - 5 = x ; x = \frac{5}{4}$$

L'area richiesta è data da:

$$Area = Area(OGAE) + Area(GFBA) = \frac{5}{4} \cdot 5 + \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{x}{x-1} dx = \frac{25}{4} + \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{x-1+1}{x-1} dx =$$

$$= \frac{25}{4} + \int_{\frac{5}{4}}^2 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \frac{25}{4} + [x + \ln|x-1|]_{\frac{5}{4}}^2 = \frac{25}{4} + \left[2 - \left(\frac{5}{4} + \ln\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= (2\ln(2) + 7) u^2 \cong 8.39 \quad u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria