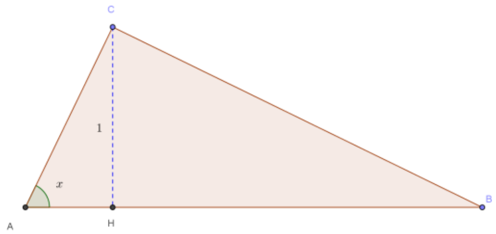
Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva) 2006

PROBLEMA 1

Il triangolo ABC, rettangolo in C, ha l'altezza relativa all'ipotenusa uguale a 1.



1)

Posto $x = C\hat{A}B \;\; e \;\; t = tg\frac{x}{2}$ *si esprima il perimetro p del triangolo in funzione di t.*

Si ha: $AC = \frac{1}{senx}$, $BC = \frac{1}{cosx}$, $AB = \frac{AC}{cosx} = \frac{1}{senx\,cosx}$. Ed è: $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$

$$p = \frac{1}{senx} + \frac{1}{cosx} + \frac{1}{senx\,cosx} = \frac{1+t^2}{2t} + \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1 - t^4 + 2t + 2t^3 + (1+t^2)^2}{2t(1-t^2)} = \frac{2t^3 + 2t^2 + 2t + 2}{2t(1-t^2)} = \frac{t^2(t+1) + (t+1)}{t(1-t^2)} =$$

$$= \frac{(t+1)(t^2+1)}{t(1-t^2)} = \frac{t^2+1}{t(1-t)}$$

$$p = \frac{t^2+1}{t(1-t)}, \qquad con \quad 0 < t < 1$$

2)

Si studi la funzione p(t) così ottenuta e se ne disegni il grafico.

$$\boldsymbol{p = \frac{t^2+1}{t(1-t)}, \;\; 0 < t < 1}$$

Studiamo la funzione a prescindere dai limiti geometrici.

Dominio: $-\infty < t < 0, \;\; 0 < t < 1, \;\; 1 < t < +\infty$

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Intersezioni con gli assi: t=0 non ha senso; se p=0: $t^2+1=0$, impossibile. Quindi il grafico non interseca gli assi cartesiani.

Segno della funzione: risulta p>0 quando $t(1-t)>0$: $0<t<1$.

Limiti:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1}{t(1-t)}=-1: \; y=-1 \text{ è } asintoto\ orizzontale$$

$$\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{t^2+1}{t(1-t)}=\pm\infty: \quad t=0 \text{ è } asintoto\ verticale$$

$$\lim_{t\to 1^{\pm}}\frac{t^2+1}{t(1-t)}=\mp\infty: \quad t=1 \text{ è } asintoto\ verticale$$

Eventuali intersezioni con l'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} y=-1 \\ y=\dfrac{t^2+1}{t(1-t)} \end{cases} ; \quad \frac{t^2+1}{t(1-t)}=-1 \;, \quad t^2+1=-t+t^2 \quad , \quad t=-1\,;$$

La curva interseca l'asintoto orizzontale ne punto (-1; -1).

Derivata prima:

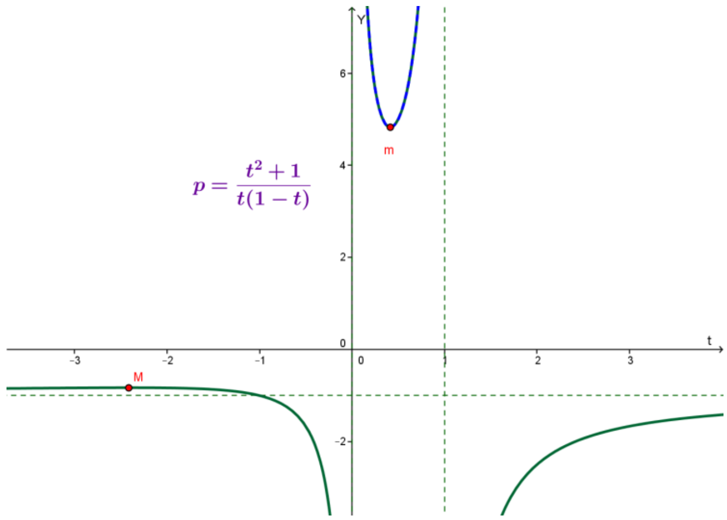
$$p=\frac{t^2+1}{t(1-t)}=\frac{t^2+1}{t-t^2}$$

$$p'=\frac{2t(t-t^2)-(t^2+1)(1-2t)}{(t-t^2)^2}=\frac{2t^2-2t^3-t^2+2t^3-1+2t}{(t-t^2)^2}=\frac{t^2+2t-1}{(t-t^2)^2}$$

Risulta $p'\geq 0 \;\; se \;\; t^2+2t-1\geq 0$: $t\leq -1-\sqrt{2} \quad or \quad t>-1+\sqrt{2}$: in tali intervalli il grafico è crescente, nella parte rimanente del dominio è decrescente. In particolare si ha un massimo relativo per $t=-1-\sqrt{2}$ ed in minimo relativo per $t=-1+\sqrt{2}$.

Derivata seconda: dalle informazioni fin qui raccolte possiamo affermare che si ha un flesso per $t<-1-\sqrt{2}$.

Grafico (tra 0 e 1 è evidenziato il grafico che tiene conto dei limiti geometrici):



3)

Se p= 6 quale è il valore, approssimato, in gradi sessagesimali, di x?

Per p=6 abbiamo: $\frac{t^2+1}{t-t^2} = 6, \quad t^2 + 1 = 6t - 6t^2, \quad 7t^2 - 6t + 1 = 0\colon\ t = \frac{3\pm\sqrt{2}}{7}$.

Si ha quindi:

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7},\quad \frac{x}{2} = arctg\left(\frac{3+\sqrt{2}}{7}\right) \cong 32.236° \cong 32°14';\quad x = 64°28'$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7},\quad \frac{x}{2} = arctg\left(\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right) \cong 12.764° \cong 12°46;\quad x = 25°32'$$

(i due angoli sono complementari come era da aspettarsi per l'evidente simmetria della figura).

Con la collaborazione di Angela Santamaria