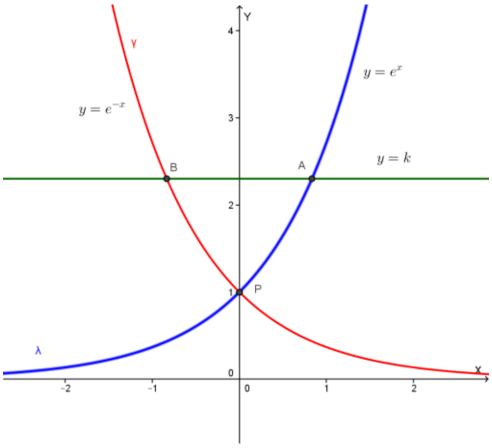
Scuole italiane all'estero (Europa) 2006 – PROBLEMA 1

Siano λ *e* γ *le curve d'equazioni rispettive* $y = e^x$ *e* $y = e^{-x}$

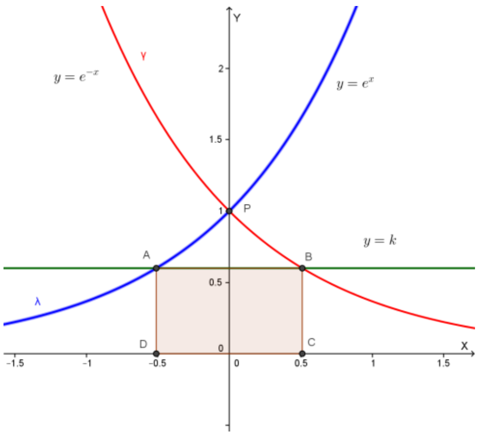
1)

Si disegnino λ *e* γ *; si indichi con P il loro punto comune e si indichino con A e B le loro intersezioni rispettive con una retta di equazione y=k (k>0).*



2)

Se k<1, si determini il rettangolo di area massima che ha i vertici in A, B e nelle proiezioni di questi sull'asse x.



I punti A e B hanno le seguenti coordinate: $A = (-x; e^x)$, $B = (x;\ e^{-x})$, $con\ \ x > 0$.
Il rettangolo ABCD ha la seguente area:
$Area(ABCD) = AB \cdot BC = 2x \cdot e^{-x} = y, \quad con\ x > 0$

Studiamo la derivata prima della funzione area:

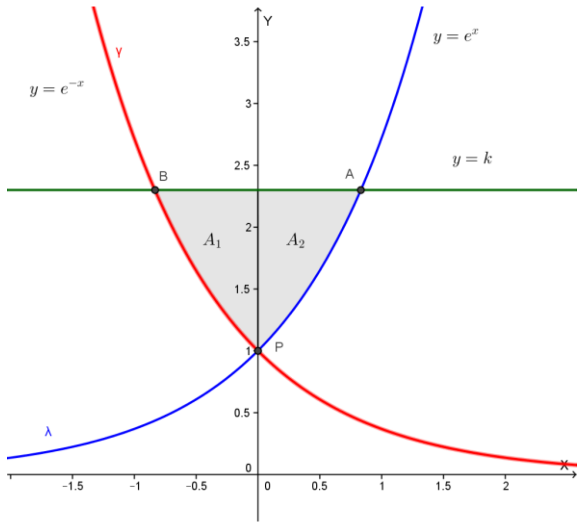
$y' = 2e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} \geq 0 \;\; se \;\; 2e^{-x}(1-x) \geq 0, \;\; x \leq 1$: y è quindi decrescente se $x > 1$ e crescente se $0 < x < 1$: $x = 1$ è punto di massimo relativo (e assoluto).

L'area del rettangolo è massima se $x = 1$ ed il massimo di tale area è:

$A_{massima} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \; u^2 \cong 0.74 \; u^2$.

3)

Se k>1, si determini k in modo che risulti uguale a 2 l'area racchiusa tra la retta e i due archi PA e PB.



Cerchiamo le ascisse dei punti B ed A:

$B: \begin{cases} y = k \\ y = e^{-x} \end{cases} \; ; \quad e^{-x} = k \; ; \quad -x = lnk \; ; \quad x = -lnk \;\; con \; k > 1$

Per l'evidente simmetria fra le due curve l'ascissa di A sarà: $x = lnk$

L'area richiesta è quindi:

$$Area(ABP) = \int_{-lnk}^{0} (k - e^{-x})\,dx + \int_{0}^{lnk} (k - e^{x})\,dx = 2\int_{0}^{lnk} (k - e^{x})\,dx = 2[kx - e^{x}]_{0}^{lnk} =$$

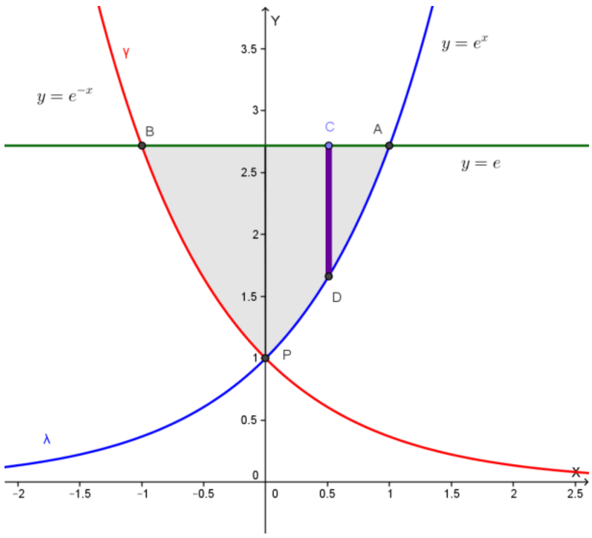
$$= 2(klnk - e^{lnk} + 1) = 2(klnk - k + 1) = 2 \;\; se \;\; klnk - k + 1 = 1\,; \;\; klnk = k\,; lnk = 1$$

$k = e$

4)

Si determini il volume del solido la cui base è la regione di area 2 prima determinata e tale che le sue sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x siano tutte rettangoli la cui altezza è 3 volte la base.

La regione richiesta è rappresentata nella seguente figura:



Il rettangolo sezione ha area:

$A(x) = CD \cdot 3CD = 3CD^2, \;\; con \;\; CD = e - e^x \;\; per \; x > 0; \; quindi \; A(x) = 3(e - e^x)^2$

Il volume richiesto (per la simmetria della figura) è dato quindi da:

$$V = 2\int_0^1 A(x)dx = 2\int_0^1 3(e - e^x)^2 dx = 6\int_0^1 (e^2 - 2e \cdot e^x + e^{2x})\,dx =$$

$$= 6\left[e^2 x - 2e \cdot e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = 6\left[e^2 - 2e^2 + \frac{1}{2}e^2 - \left(-2e + \frac{1}{2}\right)\right] = 6\left(-\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (12e - 3e^2 - 3)\;u^3 \cong 7.452\;u^3 = Volume$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria