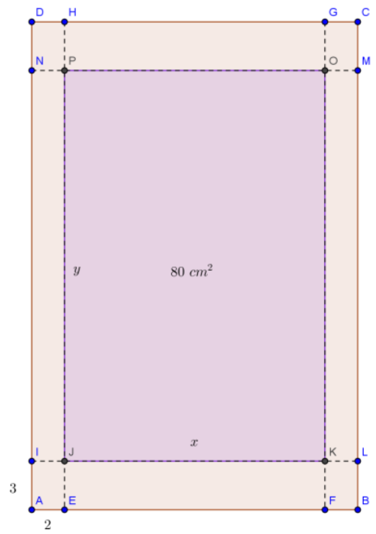
Scuole italiane all'estero (Europa) 2006 – Quesiti

QUESITO 1

Un foglio di carta deve contenere 80 cm^2 di stampa con margini superiore e inferiore di $3\ cm$ e margini laterali di $2\ cm$. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?



Indichiamo con x e y le dimensioni del rettangolo che contiene l'area di stampa; si ha:

$$xy = 80$$

Il foglio di carta avrà area:
$Area = (x+4)(y+6) = xy + 6x + 4y + 24 = 80 + 6x + 4y + 24$
Quindi deve essere minima la funzione: $Area = 6x + 4y + 104 = 2(3x + 2y) + 104$
Questa quantità è minima se lo è $z = 3x + 2y$. Essendo $xy = 80$ risulta:
$(3x)(2y) = 480$. Ma se il prodotto di due quantità (3x e 2y) è costante la loro somma è minima quando esse sono uguali; quindi z è minima se: $3x = 2y$, $x = \frac{2}{3}y$ e da $xy = 80$ otteniamo $\frac{2}{3}y^2 = 80$, $y^2 = 120$, $y = \sqrt{120} \cong 10.95\ cm$; $x = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}\sqrt{120} \cong 7.30\ cm$.
Quindi le dimensioni del foglio di carta di area minima sono circa: $(7.30 + 4) = 11.30\ cm$ e $(10.95 + 6)\ cm = 16.95\ cm$.

Il problema può essere risolto anche mediante l'uso delle derivate.
Da $xy = 80$ ricaviamo $y = \frac{80}{x}$, quindi dobbiamo rendere minima la funzione:

$z = 3x + 2y = 3x + \dfrac{160}{x}$

Studiamo la derivata prima: $z' = 3 - \frac{160}{x^2} \geq 0\ \ se\ \ 3x^2 \geq 160,\ \ x \geq \sqrt{\frac{160}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{120}$. Quindi la funzione z è decrescente se $0 < x < \frac{2}{3}\sqrt{120}$ e crescente se $x > \frac{2}{3}\sqrt{120}$. Pertanto z è minima se $x = \frac{2}{3}\sqrt{120}\ cm$ e $y = \frac{80}{x} = \sqrt{120}\ cm$, come trovato precedentemente.

QUESITO 2

L'equazione risolvente un dato problema è: $ksenx - 3k + 1 = 0$ dove k è un parametro reale e x, per soddisfare le condizioni del problema, deve essere $30° < x < 60°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

Da $ksenx - 3k + 1 = 0$ ricaviamo: $senx = \frac{3k-1}{k}$. Se $30° < x < 60°$ risulta:

$$\frac{1}{2} < senx < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto k deve soddisfare le seguenti limitazioni: $\frac{1}{2} < \frac{3k-1}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Perciò:

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{k} > \frac{1}{2} \\ \frac{3k-1}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{6k-2-k}{k} > 0 \\ \frac{6k-2-k\sqrt{3}}{k} < 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{(6-\sqrt{3})k-2}{k} < 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} k < 0 \ \ vel \ \ k > \frac{2}{5} \\ 0 < k < \frac{2}{6-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Siccome risulta: $\frac{2}{5} = 0.4$ e $\frac{2}{6-\sqrt{3}} \cong 0.47$, le soluzioni del sistema sono:

$$\frac{2}{5} < k < \frac{2}{6-\sqrt{3}}$$

QUESITO 3

La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è invertibile? Perché? Quali sono le derivate di f e di f^{-1}? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa?

La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ è strettamente crescente, quindi è invertibile.

La derivata di f è:

$D(f) = D(10^{x+8}) = 10^{x+8} \cdot ln10 = D(f)$

Ricaviamo f^{-1}. Da $y = 10^{x+8}$ ricaviamo: $x + 8 = logy,\ \ x = logy - 8$ (con log abbiamo indicato il logaritmo in base 10). Quindi: $x = f^{-1}(y) = logy - 8$. Si ha perciò:

$$D(f^{-1}) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{ln10}$$

In generale, se $x = f^{-1}(y)$ risulta: $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}$. Mediante questa proprietà nel nostro caso si ha:

$x' = \frac{1}{10^{x+8} \cdot ln10} = \frac{1}{yln10}$, come trovato direttamente.

QUESITO 4

Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ *e la tangente t al suo grafico nel punto di ascissa x=2. Quale è la pendenza di t?*

La pendenza di una retta è individuata dal coefficiente angolare, che nel nostro caso corrisponde ad $f'(2)$. Ma risulta: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, quindi: $f'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$. Detto α l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x, risulta:

$tg\alpha = 1, \quad \alpha = 45°$

QUESITO 5

In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?

Una crescita esponenziale ha equazione del tipo: $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, dove N_0 indica il numero degli individui all'stante t=0 (nel nostro caso t in giorni). Quando t=2 risulta $N = 3N_0$. Quindi: $3N_0 = N_0 \cdot e^{2k},\ quindi:\ 2k = ln3,\ k = \frac{1}{2}ln3$. La legge è quindi:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\left(\frac{1}{2}ln3\right)t} = N_0 \cdot (e^{ln3})^{\frac{1}{2}t} = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{2}t} = N_0 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^t = N(t), con\ t\ in\ giorni$$

Quando $t = 6\ ore = \frac{6}{24}\ giorno = \frac{1}{4}\ giorno$ abbiamo: $N = N_0 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$

Quindi dopo 6 ore abbiamo un aumento pari a $N\left(\frac{1}{4}\right) - N_0 = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}} - N_0 = N_0\left(\sqrt[8]{3} - 1\right)$.

L'aumento percentuale dopo 6 ore è quindi:

$$\frac{N_0\left(\sqrt[8]{3} - 1\right)}{N_0} \cdot 100 = \left(\sqrt[8]{3} - 1\right) \cdot 100 = 14.72\ \%$$

Quando $t = 18\ ore = \frac{18}{24}\ giorno = \frac{3}{4}\ giorno$ abbiamo: $N = N_0 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{4}} = N_0 \cdot 3^{\frac{3}{8}}$

Quindi dopo 18 ore abbiamo un aumento pari a $N\left(\frac{3}{4}\right) - N_0 = N_0 \cdot 3^{\frac{3}{8}} - N_0 = N_0\left(\sqrt[8]{27} - 1\right)$.

L'aumento percentuale dopo 18 ore è quindi:

$$\frac{N_0\left(\sqrt[8]{27}-1\right)}{N_0}\cdot 100=\left(\sqrt[8]{27}-1\right)\cdot 100=50.98\ \%$$

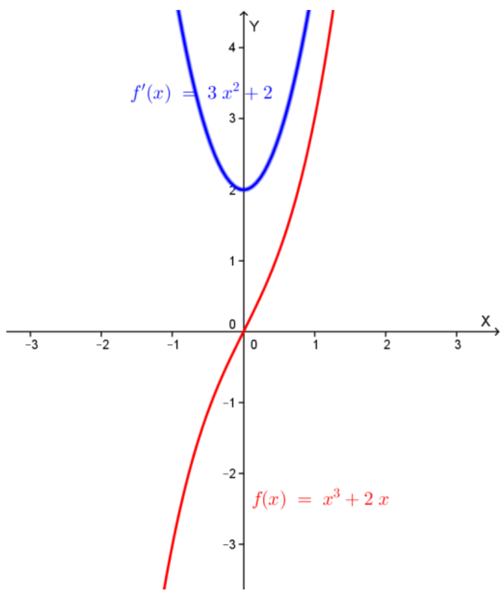
QUESITO 6

Disegnare il grafico di una funzione la cui pendenza sia sempre maggiore di 1.

La pendenza è data da $f'(x)$. Per avere $f'(x)>1$ per ogni x possiamo assumere:

$$f'(x)=3x^2+2,\ \ da\ cui\ \ f(x)=x^3+2x$$

Tale funzione è una cubica che passa per l'origine, è dispari (quindi l'origine è centro di simmetria e quindi anche flesso, per una nota proprietà delle cubiche), tende a più o meno infinito per x che tende a più o meno infinito, è sempre crescente (essendo la derivata prima sempre positiva). Il suo grafico è quindi il seguente:



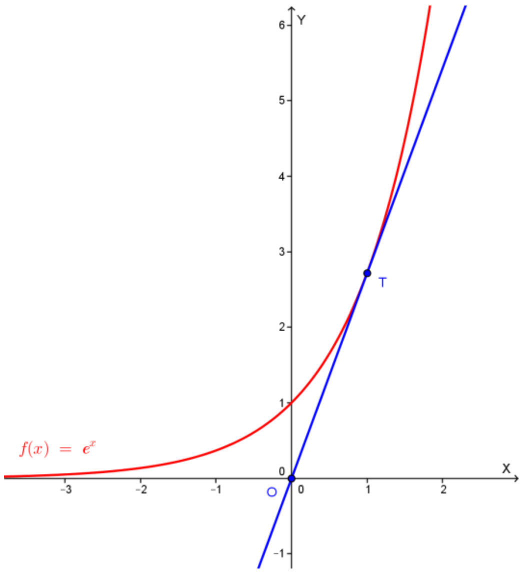
QUESITO 7

Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x.

La retta è del tipo y=mx e passa per il punto $T=(t;e^t)$, quindi: $e^t=mt$, da cui: $m=\frac{e^t}{t}$.
Posto $f(x)=e^t$, il coefficiente angolare della tangente in T è $f'(t)=e^t$, quindi:

$m = \frac{e^t}{t} = e^t, da\ cui: t = 1$. Pertanto risulta $m = e$.
La tangente richiesta ha equazione: $y = ex$, ed il punto di tangenza è $T = (1; e)$.

Questa la situazione grafica:



QUESITO 8

Il dominio della funzione $f(x) = 3arctgx - arctg\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ *è l'unione di tre intervalli. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione è costante in ciascuno di essi; indi si calcoli il valore di tale costante.*

Il dominio della funzione è dato da: $1 - 3x^2 \neq 0,\ x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ cioè:

$$-\infty < x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cup \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cup \quad \frac{\sqrt{3}}{3} < x < +\infty$$

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \frac{3}{1+x^2} - \frac{\frac{(3-3x^2)(1-3x^2)-(3x-x^3)(-6x)}{(1-3x^2)^2}}{1+\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)^2} = 0$$

Ciò dimostra che la funzione è costante a tratti.

Il valore della costante nel primo intervallo è, per esempio, il valore che la funzione assume per $x = -\sqrt{3}$, quindi:

Se $-\infty < x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(x) = f(-\sqrt{3}) = 3arctg(-\sqrt{3}) - arctg\frac{3(-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})^3}{1-3(-\sqrt{3})^2} =$

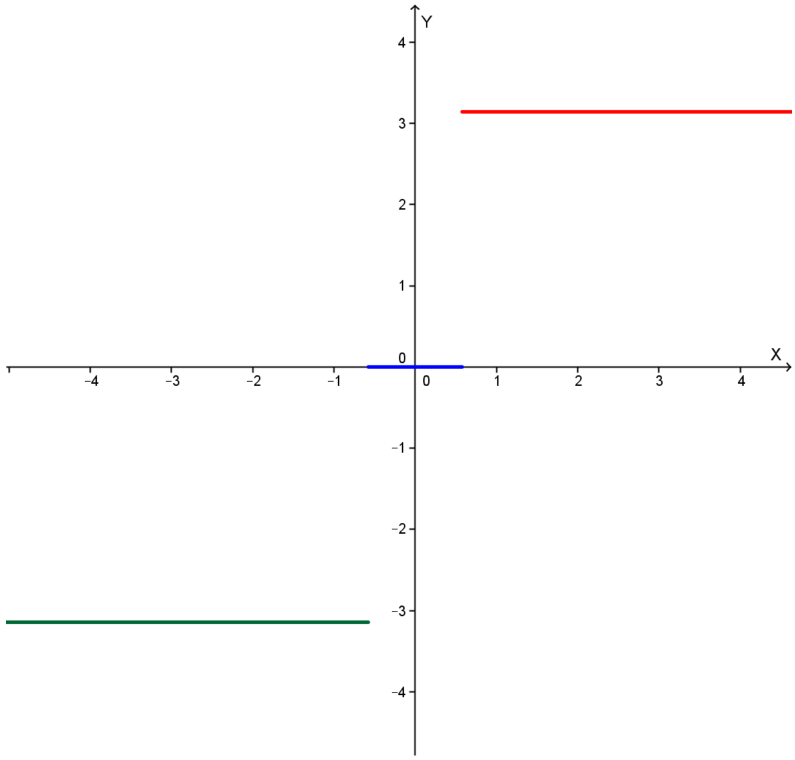
$$= 3\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 0 = -\pi$$

Essendo la funzione dispari (si verifica facilmente che $f(-x) = -f(x)$, tenendo presente che $arctg(-x) = -arctg(x)$), nel terzo intervallo avremo $f(x) = \pi$ (come si può anche verificare direttamente calcolando, per esempio, $f(\sqrt{3})$).

Nel secondo intervallo risulta $f(x) = f(0) = 0$. Pertanto:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi \quad se \quad -\infty < x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \quad se \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \pi \quad se \quad \frac{\sqrt{3}}{3} < x < +\infty \end{cases}$$

Il grafico della funzione è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria