ORDINAMENTO 2006 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p" di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2 \quad , \quad x = y^2 - 2y$$

a)

Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

p': $y = x^2$ rappresenta una parabola con vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e concavità rivolta verso l'alto.

p'': $x = y^2 - 2y$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse x, vertice nel punto (-1;1) e concavità rivolta verso destra; interseca l'asse delle ordinate nei punti di ordinate 0 e 2.

Cerchiamo le intersezioni fra le due parabole:

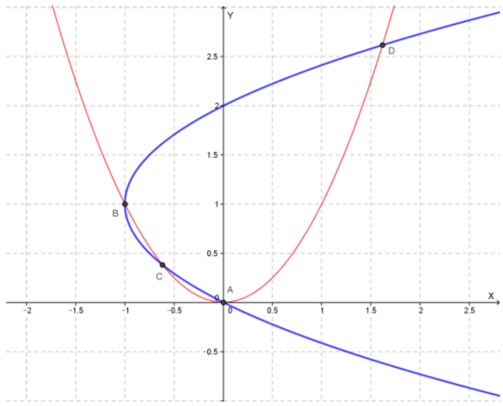
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 - 2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = x^4 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 2x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0$$

quindi: $x = 0 \quad e \quad x^3 - 2x - 1 = 0$; quest'ultima si abbassa di grado mediante la regola di Ruffini in : $(x+1)(x^2-x-1) = 0$, che ammette le radici $x = -1 \ e \ x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ risulta $y = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(6 \pm 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

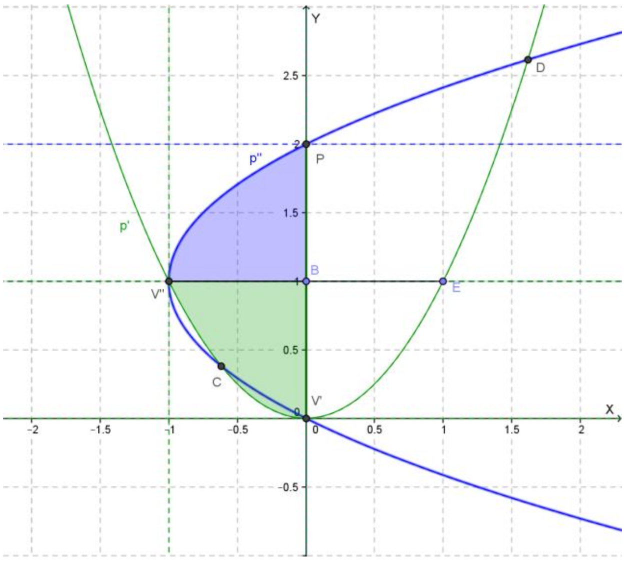
Le due parabole si intersecano quindi nei punti:

$$A = (0;0)\,, \quad B = (-1;1)\,, \quad C = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\,, \quad D = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$



b)

Indicato con V' il vertice della parabola p', con V" il vertice della parabola p" e con P il punto in cui p" interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco V'V" della parabola p', dall'arco V"P della parabola p" e dal segmento V'P.



La regione richiesta è formata da metà del segmento parabolico di p' di base V''E (base 2 e altezza 1) e da metà del segmento parabolico di p'' di base V'P (base 2 e altezza 1):

$$Area = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1\right)=\frac{4}{3}u^2$$

c)

Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

p': $y = x^2$ $\qquad$ p'': $x = y^2 - 2y$

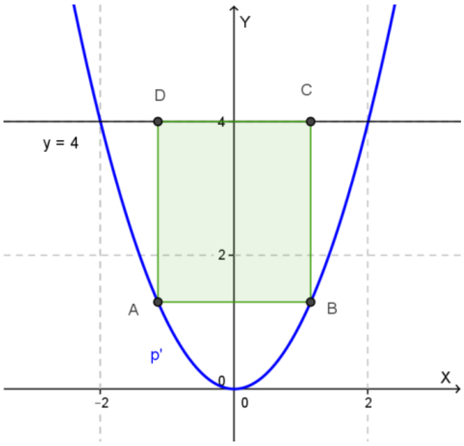
Cerchiamo i coefficienti angolari delle tangenti in O alle die parabole.

Per quanto riguarda la parabola p', poiché O è il vertice, risulta m'=0.
Per quanto riguarda la parabola p'', poiché $x' = 2y - 2$, $x'(0) = -2 = \frac{1}{m} \Longrightarrow m = -\frac{1}{2}$
Quindi l'angolo α secondo cui si tagliano le due parabole è tale che:

$$tg(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 0}{1 + 0}\right| = \frac{1}{2} \quad da\ cui \quad \alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26.4349° \cong 26°33'54"$$

d)

Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione y=4 e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.



p': $y = x^2$

Posto $B = (x; x^2)$, $con \quad 0 \le x \le 2$ risulta: $AB = 2x \quad e \quad BC = 4 - x^2$ quindi:

$Area(ABCD) = 2x(4 - x^2) = A$

Dobbiamo quindi ottimizzare la seguente funzione:

$$\begin{cases} A(x) = 2x(4 - x^2) \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Si tratta di una funzione continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato, quindi, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti, da ricercarsi tra i valori agli estremi ed i punti a derivata nulla.

$A'(x) = 8 - 6x^2 = 0 \quad se \quad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (nel nostro intervallo). Risulta:

$$A(0) = A(2) = 0\,, \quad A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

Quindi l'area massima si ottiene per $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ e vale $\frac{32}{3\sqrt{3}}$

e)

Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

Il perimetro del rettangolo è dato da:

$2p = 2AB + 2BC = 4x_B + 2(4 - y_B) = 4x + 2(4 - x^2) = 2(-x^2 + 2x + 4)$ che è massimo

se lo è:

$p = -x^2 + 2x + 4$, con $0 \leq x \leq 2$

Questa funzione rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso e con il vertice di ascissa $x_V = 1$ (appartenente all'intervallo $0 \leq x \leq 2$): in corrispondenza del vertice abbiamo il massimo; il perimetro massimo vale 10, ottenuto sostituendo x=1 in $2(-x^2 + 2x + 4)$.

Quindi:

il perimetro massimo si ottiene per $x = 1$ mentre l'area massima si ottiene per $\mathrm{x} = \sqrt{\frac{4}{3}}$:

il rettangolo di area massima non è anche quello di perimetro massimo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri