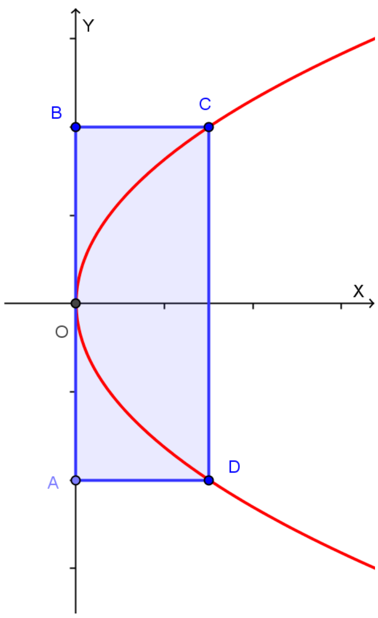
ORDINAMENTO 2006 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si considerino il rettangolo ABCD e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V". Determinare il rapporto V'/V".



Indicata con $x = ay^2$ l'equazione della parabola, risulta:

$$V' = \pi \cdot OB^2 \cdot BC = \pi \cdot y_c^2 \cdot x_c = \pi \cdot \frac{x_c}{a} \cdot x_c = \frac{\pi}{a} \cdot x_c^2$$

$$V'' = \pi \int_0^{x_c} y^2 dx = \pi \int_0^{x_c} y^2 dx = \pi \int_0^{x_c} \frac{x}{a} dx = \frac{\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_c} = \frac{\pi}{2a}[x_c^2] = \frac{\pi}{2a} \cdot x_c^2$$

Quindi:

$$\frac{V'}{V''} = \frac{\frac{\pi}{a} \cdot x_c^2}{\frac{\pi}{2a} \cdot x_c^2} = 2$$

QUESITO 2

Il numero delle soluzioni dell'equazione $sen2x \cos x = 2$ *nell'intervallo reale* $[0, 2\pi]$ *è:*

[A] 0; *[B] 2;* *[C] 3;* *[D] 5.*

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Primo modo: il prodotto di due numeri minori o uguali ad 1 (sen(2x) e cos(x)) non può essere uguale a 2. Quindi la risposta esatta è la [A].

Secondo modo:

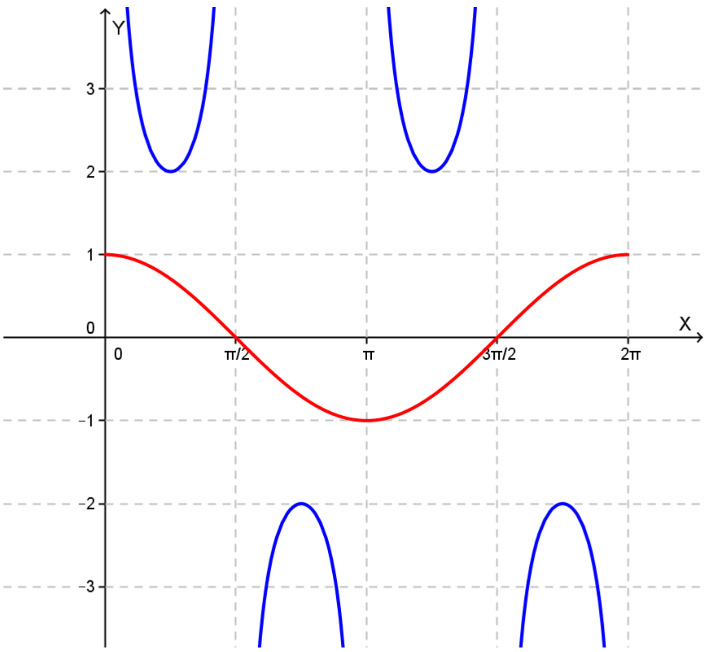
L'equazione può essere vista nella forma:

$$cosx = \frac{2}{sen(2x)} = 2cosec(2x)$$

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le due funzioni:

$y = \cos(x)$ $\quad e \quad$ $y = 2\ cosec(2x)$

Notiamo che il grafico di $y = 2\ cosec(2x)$ si ottiene facilmente dal grafico di $y = \ cosec(x)$ con una contrazione orizzontale di fattore 2 ed una dilatazione verticale di fattore 2.



Analizzando i grafici si deduce che l'equazione non ammette alcuna soluzione.

La risposta corretta è la [A].

QUESITO 3

Il limite della funzione $f(x) = x\, sen\frac{1}{x}$ *, per* $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è 0; [C] è un valore finito diverso da 0; [D] è $+\infty$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

La funzione $y = sen\frac{1}{x}$ non ammette limite per $x \to 0$, ma è limitata tra -1 e 1. Il limite si può calcolare utilizzando il teorema del confronto; infatti:

$$-x \leq x\, sen\frac{1}{x} \leq x$$

e siccome le funzioni estreme tendono a 0, anche la nostra funzione tende a 0:
la risposta esatta è quindi la [B].

QUESITO 4

Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x, della funzione f(x)=tg(x).

Primo modo (usando la derivata di un quoziente):

$$D(tgx) = D\left(\frac{senx}{cosx}\right) = \frac{\cos x\, cosx - senx(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Secondo modo (usando la definizione di derivata):

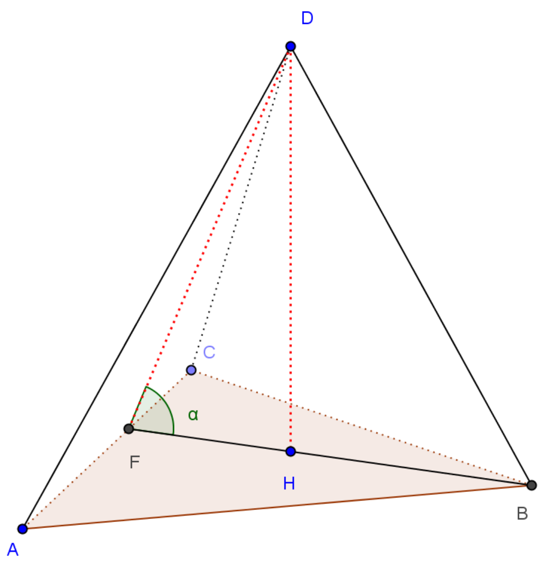
$$D(tgx) = \lim_{h\to 0}\frac{tg(x+h) - tgx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{tgx + tgh}{1 - tgx\, tgh} - tgx\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{tgx + tgh - tgx + tg^2 x\, tgh}{1 + tgx\, tgh}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{tgh + tg^2 x\, tgh}{1 + tgx\, tgh}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{tgh}{h}\right)\cdot\left(\frac{1 + tg^2 x}{1 + tgx\, tgh}\right) = 1\cdot\left(\frac{1 + tg^2 x}{1 + 0}\right) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

QUESITO 5

Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".



Consideriamo la perpendicolare DF al lato AC; la perpendicolare da B al lato AC cadrà anch'essa su F (piede dell'altezza relativa ad AC in ACD e piede dell'altezza relativa ad AC in ABC).

L'ampiezza dell'angolo diedro formato dalle facce ACD e ABC è uguale all'angolo α formato da DF e BF.

Sia l la misura dello spigolo del tetraedro. DF è l'altezza di un triangolo equilatero di lato l, quindi:

$$DF = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

L'altezza DH del tetraedro cade nel centro H della base ABC, che è anche il baricentro del triangolo ABC, quindi (per una nota proprietà del baricentro):

$$FH = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3}DF = \frac{l}{6} \cdot \sqrt{3}.$$

Ma allora, considerando il triangolo DFH, rettangolo in H, risulta:

$$FH = DF \cdot cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad cos\alpha = \frac{FH}{DF} = \frac{\frac{l}{6} \cdot \sqrt{3}}{\frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70.5288°$$

Quindi:

$$\alpha \cong 70.5288° = 70°32'$$

QUESITO 6

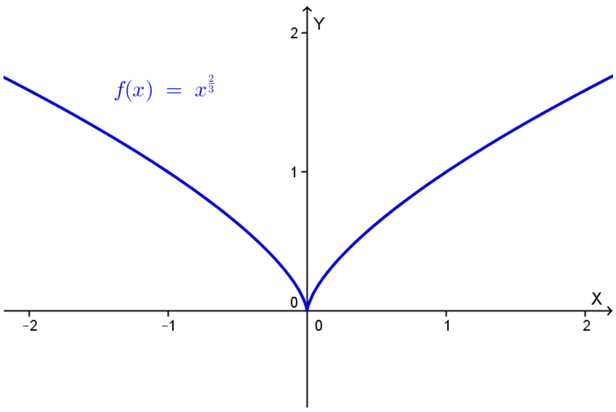
Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.*

La funzione è definita su tutto R. La derivata della funzione è:
$f'(x) = D\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$: tale derivata non esiste in x=0.

In particolare, essendo:

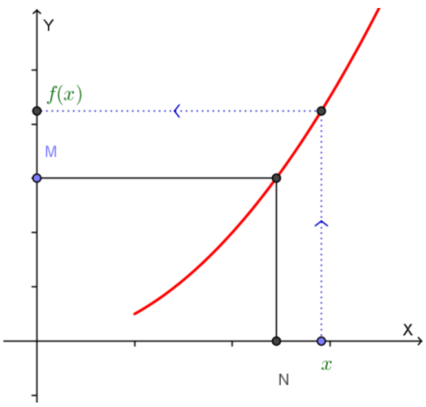
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$$

In x=0 abbiamo una cuspide verso il basso:



QUESITO 7

Considerata la funzione reale di variabile reale f(x), affermare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se x>N allora f(x)>M.
È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.



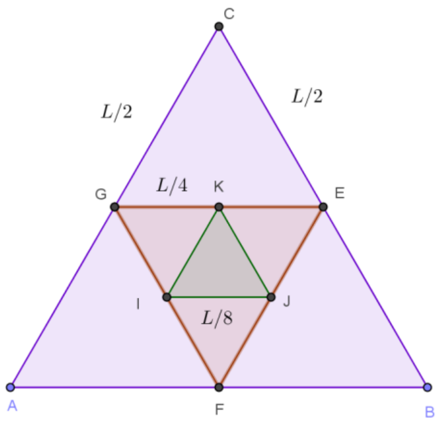
La definizione è esatta richiede che per ogni numero reale M’>0 esista un numero reale N, dipendente da M’, tale che, per ogni x>N risulti f(x)>M’.

Se M>0 l’affermazione è vera (M’=M);
Se M=0 basta prendere M’=M+1 e la definizione è valida;
Se M<0 basta prendere M’=–M>0 e la definizione è valida.

L’affermazione è quindi vera.

QUESITO 8

È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo (n–1)-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞ .



I triangoli della sequenza hanno lati: $L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{8}, \ ecc.$ cioè sono la metà del lato precedente; le aree saranno quindi la quarta parte del triangolo precedente. Ciò vuol dire che le aree dei triangoli son in progressione geometrica con ragione $q = \frac{1}{4}$.
La somma delle n aree è quindi:

$$S_n = A_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Essendo $q = \frac{1}{4} < 1$ tale somma, per $n \to \infty$ tende a $A_1 \cdot \frac{1}{1-q} = A_1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot A_1$

Ma:

$$A_1 = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

quindi: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4}{3} \cdot A_1 = \frac{4}{3} \cdot L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L^2$

QUESITO 9

Si consideri la seguente uguaglianza: $ln(2x+1)^4 = 4\,ln(2x+1)$. *È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.*

L'uguaglianza vale solo se $2x + 1 > 0$. Infatti la relazione corretta è:

$ln(2x+1)^4 = 4\,ln|2x+1|$.

QUESITO 10

Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia "1", posta a capotavola, è riservata al ragazzo "1", che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Il numero dei modi in cui i quattro ragazzi numerati da 2 a 4 possono occupare è pari alle permutazioni di 4 oggetti, quindi 4!=24.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri