PNI 2006 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p" di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2 \quad , \quad x = y^2 - 2y$$

a)

Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

p': $y = x^2$ rappresenta una parabola con vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e concavità rivolta verso l'alto.

p'': $x = y^2 - 2y$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse x, vertice nel punto (-1;1) e concavità rivolta verso destra; interseca l'asse delle ordinate nei punti di ordinate 0 e 2.

Cerchiamo le intersezioni fra le due parabole:

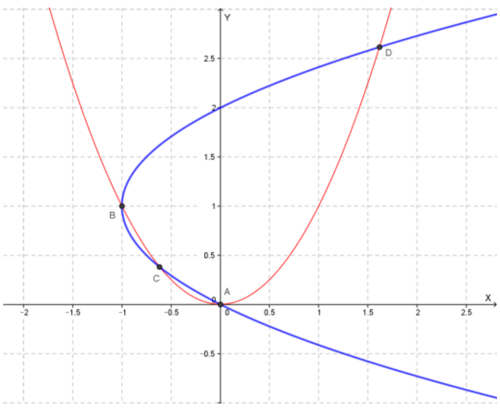
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 - 2y \end{cases} \Rightarrow x = x^4 - 2x^2 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 2x - 1) = 0$$

quindi: $x = 0 \quad e \quad x^3 - 2x - 1 = 0$; quest'ultima si abbassa di grado mediante la regola di Ruffini in : $(x+1)(x^2-x-1) = 0$, che ammette le radici $x = -1 \ e \ x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Se $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ risulta $y = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(6 \pm 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

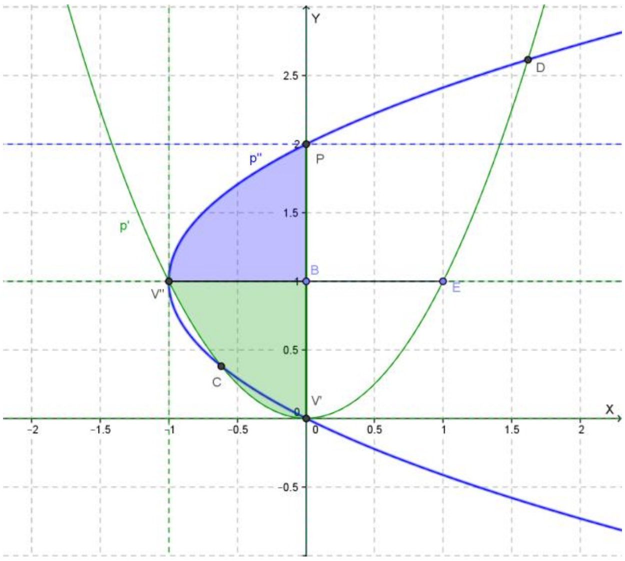
Le due parabole si intersecano quindi nei punti:

$$A = (0;0)\ ,\quad B = (-1;1)\ ,\quad C = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\ ,\quad D = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$



b)

Indicato con V' il vertice della parabola p', con V" il vertice della parabola p" e con P il punto in cui p" interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco V'V" della parabola p', dall'arco V"P della parabola p" e dal segmento V'P.



La regione richiesta è formata da metà del segmento parabolico di p' di base V''E (base 2 e altezza 1) e da metà del segmento parabolico di p'' di base V'P (base 2 e altezza 1):

$$Area = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1\right) = \frac{4}{3}u^2$$

c)

Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

$p'\colon\ y = x^2 \qquad p''\colon\ x = y^2 - 2y$

Cerchiamo i coefficienti angolari delle tangenti in O alle die parabole.

Per quanto riguarda la parabola p', poiché O è il vertice, risulta m'=0.
Per quanto riguarda la parabola p'', poiché $x' = 2y - 2\,,\ \ x'(0) = -2 = \frac{1}{m} \implies m = -\frac{1}{2}$
Quindi l'angolo α secondo cui si tagliano le due parabole è tale che:

$$tg(\alpha) = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 0}{1+0}\right| = \frac{1}{2} \quad da\ cui \quad \alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26.4349° \cong 26°33'54"$$

d)

Le due parabole p' e p" sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.

$p'\colon\ y = x^2 \qquad p''\colon\ x = y^2 - 2y$

Trasformiamo la parabola p'' mediante la simmetria di asse y=x; la sua equazione è:

$p'''\colon \quad y = x^2 - 2x$

Trasformiamo p''' mediante la traslazione T che porta il suo vertice nel vertice della p'.

$V' = (0;0), \quad V''' = (1;-1)$

La traslazione che porta V''' in V' ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + (0-1) \\ y' = y + (0+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Quindi p' si trasforma in :

$$y' - 1 = (x'+1)^2 - 2(x'+1) \quad \Rightarrow \quad y' = (x')^2$$

L'isometria che porta la parabola p''' nella parabola p' si ottiene applicando alla simmetria S di asse y=x la traslazione T, quindi ha equazioni:

$$S\colon \begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases} \qquad T\colon \begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + 1 \end{cases} \qquad T \circ S\colon \begin{cases} x'' = y - 1 \\ y'' = x + 1 \end{cases}$$

Verifichiamo che isometria di equazioni $\sigma\colon \begin{cases} x'' = y - 1 \\ y'' = x + 1 \end{cases}$ trasforma la p'' nella p'.

La trasformazione inversa di σ è σ^{-1} : $\begin{cases} x = y'' - 1 \\ y = x'' + 1 \end{cases}$

$x = y^2 - 2y$ diventa: $y'' - 1 = (x''+1)^2 - 2(x''+1) \quad \Rightarrow \quad y'' = (x'')^2$

Le due parabole si corrispondono quindi nell'isometria σ , quindi sono congruenti.

e)

Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

L'isometria trovata nel punto precedente ha equazioni:

$$\sigma: \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

Vediamo se ha punti uniti, ponendo x=x' e y=y':

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - 1 \\ y = (y-1) + 1 = y \end{cases} \quad da\ cui \quad x = y - 1 \quad retta\ di\ punti\ uniti$$

Vediamo se ci sono altre rette unite.

Se la retta è parallela all'asse delle y abbiamo:

$x' = k$ che si trasforma in $y - 1 = k$: $non\ coincide\ mai\ con \quad x' = k$

Consideriamo ora la generica retta r' di equazione $y' = mx' + q$; essa si trasforma in r:

$$x + 1 = m(y-1) + q \quad \Rightarrow \quad x - my + 1 + m - q = 0 \quad .$$

La r' può essere scritta nella forma: $mx' - y' + q = 0$.

Le due rette coincidono se:

$$\frac{1}{m} = \frac{-m}{-1} = \frac{1 + m - q}{q}$$

Quindi, dalla prima uguaglianza:

$m^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 1$. Se m=1, uguagliando il primo ed il terzo membro otteniamo:

$$1 = \frac{2-q}{q} \quad \Rightarrow \quad q = 2 - q \quad \Rightarrow \quad q = 1 \ : retta\ unita \quad y = x + 1 \quad (già\ trovata)$$

Se m=-1, otteniamo:

$$-1 = \frac{-q}{q} \quad \Rightarrow valida\ per\ ogni\ q, quindi\ sono\ unite\ le\ rette\ di\ equazione: \ y = -x + q$$

che sono un fascio di rette perpendicolari all'asse di simmetria.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri