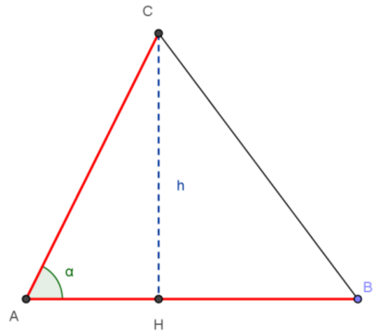
ORDINAMENTO 2006 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC in cui: $\overline{AB} = \frac{25}{2}$, $\overline{AC} = 5\sqrt{5}$, $tg\,\hat{A} = 2$.

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

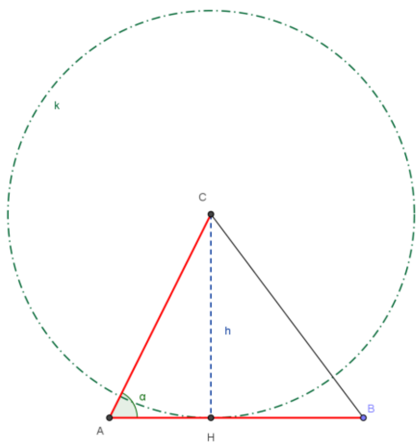


Siccome $h = AC \cdot sen\,\alpha$, occorre determinare $sen\,\alpha$ sapendo che $tg\,\alpha$. Essendo l'angolo α compreso tra 0° e 180° il suo seno sarà positivo. Quindi:

$$sen\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

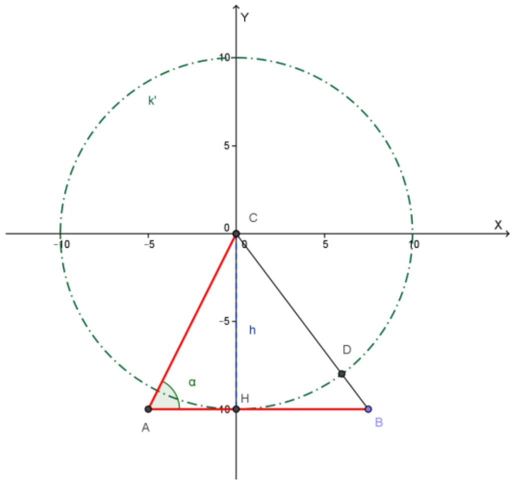
Si ha perciò: $h = AC \cdot sen\,\alpha = 5\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10$

Tracciamo ora la circonferenza k con centro in C e tangente ad AB:



Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

Scegliamo il sistema di riferimento con l'origine in C e asse x parallelo ad AB come in figura:



a)

Scrivere l'equazione della circonferenza k.

La circonferenza ha centro in O=(0; 0) e raggio h=10, quindi ha equazione:

$k: \quad x^2 + y^2 = 100$

b)

Trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC.

Osservando la figura precedente calcoliamo la misura dei segmenti AH e BH.

$$h = AH \cdot tg\alpha \,, \;\; AH = \frac{h}{tg\alpha} = \frac{10}{2} = 5 \,, \;\; BH = AB - AH = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2}$$

Le coordinate dei vertici del triangolo sono quindi:

$$A = (-5;\, -10), \qquad B = \left(\frac{15}{2};\, -10\right), \qquad C = O = (0;0).$$

Per trovare le coordinate di D cerchiamo l'equazione della retta BC=BO, che intersecheremo con la circonferenza. Tale retta è del tipo $y = mx$ ed è: $m = \frac{-10}{\frac{15}{2}} = -\frac{4}{3}$.

Retta BC: $y = -\frac{4}{3}x$. Poniamo a sistema questa equazione con quella della circonferenza, osservando che l'ascissa di D è positiva:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100 \quad \Rightarrow x = 6 \qquad \Rightarrow \quad D = (6;\ -8)$$

c)

Determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A.

L'equazione della parabola è del tipo: $y = ax^2 + bx + c$.

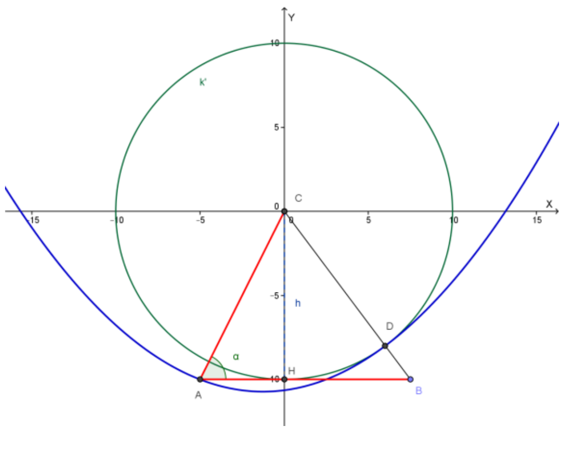
La parabola è tangente alla circonferenza in D se lo è alla retta tangente in D alla circonferenza; quest'ultima retta è perpendicolare ad OD (raggio), quindi ha coefficiente angolare opposto del reciproco di quello della retta BC: $\frac{3}{4}$.
Il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto di ascissa x è: $2ax + b$.
Considerando il punto D, di ascissa 6, risulta:
$\frac{3}{4} = 12a + b$, $48a + 4b = 3$. Mettiamo a sistema questa relazione con quelle che otteniamo imponendo il passaggio della parabola per A e D:

passaggio per $A = (-5;\ -10)$: $-10 = 25a - 5b + c$
passaggio per $D = (6;\ -8)$: $-8 = 36a + 6b + c$

Quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema:

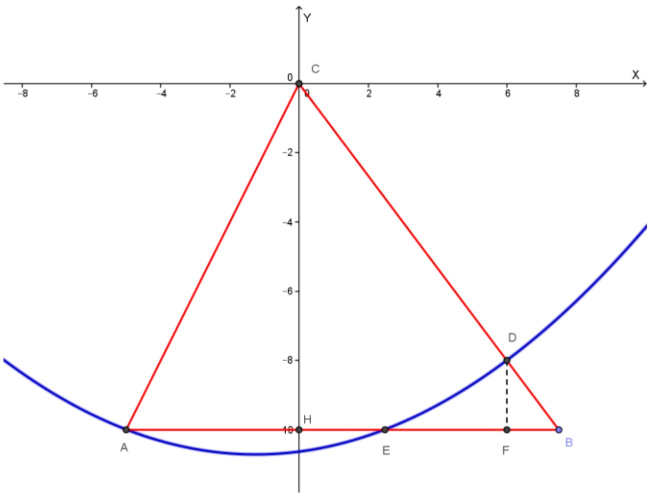
$$\begin{cases} 48a + 4b = 3 \\ 25a - 5b + c = -10 \\ 36a + 6b + c = -8 \end{cases} \quad \dots\dots \quad \begin{cases} a = \frac{25}{484} \\ b = \frac{63}{484} \\ c = -\frac{2575}{242} \end{cases}$$

La parabola richiesta ha quindi equazione: $y = \frac{25}{484}x^2 + \frac{63}{484}x - \frac{2575}{242}$



d)

Calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC.



Determiniamo le coordinate del punto E di intersezione fra la parabola ed il segmento AB:

$$\begin{cases} y = -10 \\ y = \frac{25}{484}x^2 + \frac{63}{484}x - \frac{2575}{242} \end{cases} \quad \dots\dots \quad E = \left(\frac{62}{25};\ -10\right)$$

Indichiamo con F il punto del segmento AB avente la stessa ascissa di D: $F = (6;\ -10)$.
L'area del triangolo mistilineo BDE si ottiene nel modo seguente:

$$Area(EBD) = Area(DEF) + Area(BDF) = \int_{\frac{62}{25}}^{-10} \left[\left(\frac{25}{484}x^2 + \frac{63}{484}x - \frac{2575}{242}\right) + 10\right] dx +$$

$$+\frac{BF \cdot DF}{2} = \frac{5896}{1875} + \frac{\left(\frac{15}{2} - 6\right) \cdot 2}{2} = \frac{5896}{1875} + \frac{3}{2} = \frac{17417}{3750}\ u^2$$

La seconda delle due regioni in cui la parabola divide il triangolo si ottiene sottraendo all'area del triangolo l'area della prima regione:

$$Area(EAEDC) = Area\ (ABC) - \frac{17417}{3750}\ u^2 = \frac{\frac{25}{2} \cdot 10}{2}\ u^2 - \frac{17417}{3750}\ u^2 = \frac{108479}{1875}\ u^2$$

e)

Trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k e alla parabola p.

Dobbiamo mettere a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{25}{484}x^2 + \dfrac{63}{484}x - \dfrac{2575}{242} \end{cases}$$

Senza fare i calcoli, osservando la figura del punto c) in cui è chiara la posizione fra parabola, triangolo e circonferenza, si può concludere che:

la parabola e la circonferenza hanno in comune solo il punto D.

Con la collaborazione di Angela Santamaria