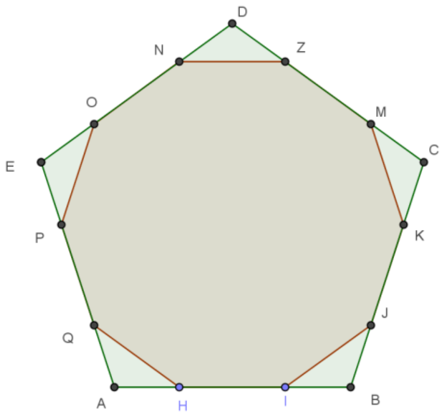
ORDINAMENTO 2006 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).



Recidiamo i triangoli congruenti NZD, MKC, JBI, ecc., dal pentagono regolare ABCDEL in modo da ottenere il decagono regolare NZMKJIHQPO. Deve essere:

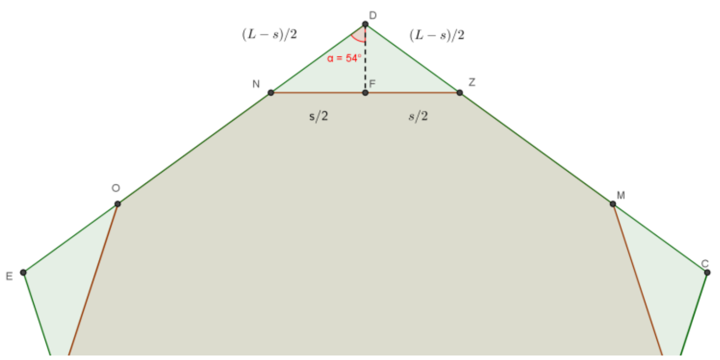
$NZ = ZM$ e indicando con s il lato del decagono, essendo L il lato del pentagono si ha:

$$DZ = DN = \frac{DC - ZM}{2} = \frac{L - s}{2}$$

Siccome la somma degli angoli interni di un pentagono regolare è 3 angoli piatti, risulta:

$$\widehat{D} = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$$

Consideriamo il triangolo DNZ, isoscele sulla base NZ:



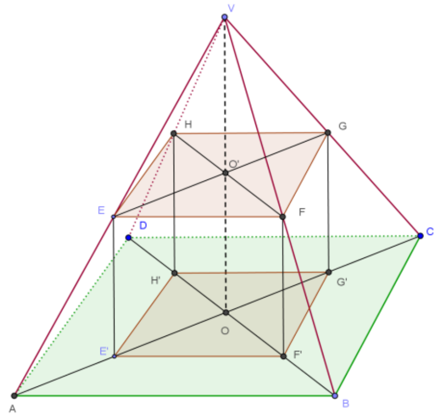
Risulta:

$$NF = \frac{s}{2} = ND\ sen\alpha = \frac{L-s}{2} \cdot sen(54°)\ \Rightarrow\ s = (L-s) \cdot sen(54°)\ \Rightarrow$$

$s = \frac{L \cdot sen(54°)}{1+sen(54°)} = \frac{\sqrt{5}}{5} L$ (se ricordiamo che sen(54°)= $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$)

QUESITO 2

Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.



Indicato con s lo spigolo di base AB della piramide (s>0), la sua altezza VO è 2s. Indichiamo con x lo spigolo del cubo (0<x<s): OO'=x. Per una nota proprietà di geometria solida risulta:

$$Area(ABCD): Area(EFGH) = VO^2 : VO'^2\ ,\quad s^2 : x^2 = 4s^2 : (2s-x)^2\ ,\quad 4x^2 = (2s-x)^2,$$

$$3x^2 + 4sx - 4s^2 = 0,\ \ da\ cui\ \ x = \frac{2}{3}s\ \ (e\ x = -2s\ \ \ non\ accettabile).$$

Pertanto lo spigolo del cubo è $\frac{2}{3}s$. Si ha quindi:

$$\frac{V(cubo)}{V(piramide)} = \frac{\left(\frac{2}{3}s\right)^3}{\frac{1}{3}s^2 \cdot 2s} = \frac{4}{9}$$

QUESITO 3

Se le funzioni f (x) e g(x), entrambe tendenti a 0, quando x→a, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{g(x)}{f(x)}$ *quando x→a. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.*

E' falso, poiché il Teorema di De L'Hôpital fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza del limite, ma non necessaria.

Controesempio:

$$g(x) = x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}, \qquad f(x) = x\ , \quad a = 0$$

Osserviamo che esiste il limite $\frac{g(x)}{f(x)}$ per x che tende a zero, infatti:

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot sen\,\frac{1}{x} = 0$ per il teorema del confronto.

Le ipotesi del teorema di De L'Hôpital non sono però tutte soddisfatte; infatti:

$g' = 2x sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ \ f' = 1\ ,\ \ \frac{g'}{f'} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ che non ammette limite per x che tende a zero in quando $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tende a zero ma $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non ammette limite (oscilla tra -1 ed 1).

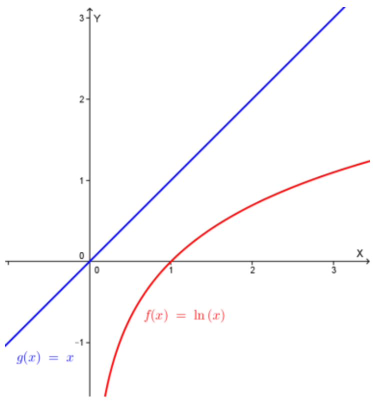
QUESITO 4

Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x \quad per\ x \to +\infty$ *è:*

[A] 0. [B] un valore finito diverso da 0. [C] $+\infty$. [D] $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Il limite è $+\infty$ perché, pur presentandosi il limite nella forma $+\infty - \infty$, l'infinito x domina sull'infinito lnx. Questo può essere verificato graficamente, osservando le due funzioni y=x e y=lnx:



Allo stesso risultato si può pervenire utilizzando la regola di De L'Hôpital per dimostrare che:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$; infatti, essendo verificate le condizioni del teorema, abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

La risposta corretta è quindi la [C].

QUESITO 5

Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione $arctg(x)$ *è* $\frac{1}{1+x^2}$.

Posto $\mathrm{y = arctg(x)}$ si ha $\mathrm{x = tgy}$. Per il teorema sulla derivata della funzione inversa si ha:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+tg^2y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi se $\mathrm{y = arctg(x)}$ risulta $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

QUESITO 6

Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$*, nell'intervallo* $[-1;\ 1]$.

Il teorema di Rolle afferma quanto segue:

Sia y=f(x) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b], derivabile nell'intervallo aperto (a; b), tale che f(a)=f(b), allora esiste almeno un punto c in (a; b) la cui derivata prima si annulla.

La funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$ $NON\ SODDISFA$ il teorema nell'intervallo $[-1;\ 1]$, poiché non è derivabile nell'aperto (-1; 1). Infatti non è derivabile in x=0, essendo:

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$; quindi se x<0 $f'(x) = -1$, se x>0 $f'(x) = 1$ (la funzione ha in x=0 un punto angoloso).

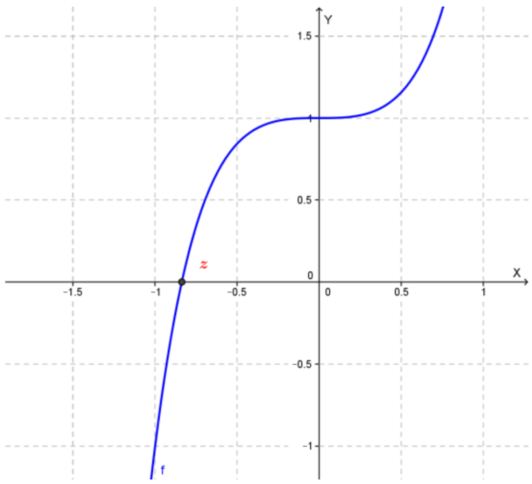
QUESITO 7

Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione: $x^5 + x^3 + 1 = 0$ ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z;\ z + 1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

Consideriamo la funzione di equazione $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Si tratta di una funzione razionale intera, definita su tutto R, tende a più infinito per x che tende a più infinito e a meno infinito se x tende a meno infinito. Il grafico incontra l'asse y nel punto di ordinata 1. La derivata prima è: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ per ogni x: la funzione è quindi sempre crescente, pertanto il suo grafico taglia l'asse x in un solo punto, di ascissa negativa, poiché se x=0 risulta y=1.Siccome f(-1)=-1, lo zero z della funzione è compreso tra -1 e 0:

l'intervallo a cui appartiene la soluzione dell'equazione è [-1; 0].

Indichiamo il grafico qualitativo della funzione:



QUESITO 8

Considerata l'equazione: $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione razionale.

Ricordiamo che le eventuali radici razionali di un'equazione razionale intera a coefficienti interi sono da ricercarsi tra le frazioni del tipo a/b, dove a è un divisore del termine noto (nel nostro caso1) e b un divisore del coefficiente del termine di grado massimo (nel nostro caso 1). Nel nostro caso quindi le eventuali soluzioni razionali sono 1 e -1. Si verifica facilmente che x=1 è soluzione dell'equazione, mentre x= -1 non lo è.

QUESITO 9

Considerata l'equazione: $\cos\frac{x}{2}\ sen(2x) = 12$*, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.*

Ricordiamo che il seno ed il coseno di un qualsiasi angolo sono compresi fra -1 e 1; risulta quindi:

$$-1 \le \cos\frac{x}{2} \le 1 \quad , \qquad -1 \le sen(2x) \le 1$$

Il prodotto di due numeri compresi fra -1 e 1 non può essere uguale a 12: l'equazione non ammette quindi soluzioni reali.

QUESITO 10

Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio»?

Con 16 femmine, di cui solo una si chiama Maria, possiamo formare 15 coppie diverse comprendenti Maria.

Con 12 maschi, di cui solo uno si chiama Antonio, possiamo formare 11 coppie comprendenti Antonio.

Le delegazioni con due femmine e due maschi comprendenti Maria e Antonio sono pari a 15x11=165.

Con la collaborazione di Angela Santamaria