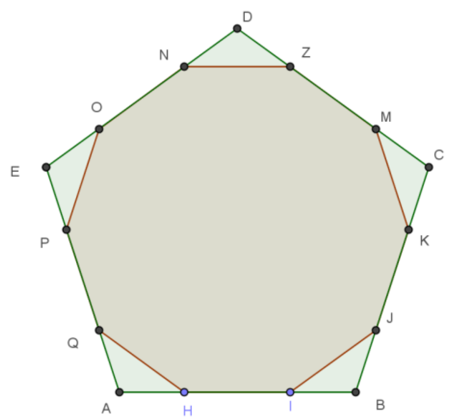
PNI 2006 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).



Recidiamo i triangoli congruenti NZD, MKC, JBI, ecc., dal pentagono regolare ABCDEL in modo da ottenere il decagono regolare NZMKJIHQPO. Deve essere:

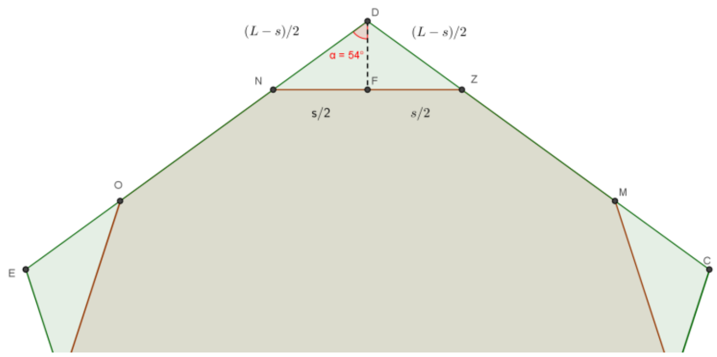
$NZ = ZM$ e indicando con s il lato del decagono, essendo L il lato del pentagono si ha:

$$DZ = DN = \frac{DC - ZM}{2} = \frac{L - s}{2}$$

Siccome la somma degli angoli interni di un pentagono regolare è 3 angoli piatti, risulta:

$$\widehat{D} = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$$

Consideriamo il triangolo DNZ, isoscele sulla base NZ:



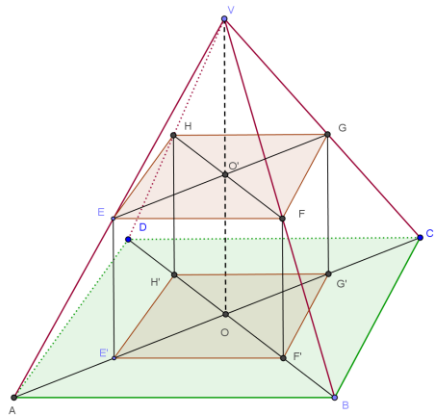
Risulta:

$$NF = \frac{s}{2} = ND\ sen\alpha = \frac{L-s}{2} \cdot sen(54°) \ \Rightarrow \ s = (L-s) \cdot sen(54°) \ \Rightarrow$$

$s = \frac{L \cdot sen(54°)}{1+sen(54°)} = \frac{\sqrt{5}}{5} L$ (se ricordiamo che sen(54°)= $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$)

QUESITO 2

Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.



Indicato con s lo spigolo di base AB della piramide (s>0), la sua altezza VO è 2s. Indichiamo con x lo spigolo del cubo (0<x<s): OO'=x. Per una nota proprietà di geometria solida risulta:

$$Area(ABCD) : Area(EFGH) = VO^2 : VO'^2 , \quad s^2 : x^2 = 4s^2 : (2s-x)^2 , \quad 4x^2 = (2s-x)^2,$$

$$3x^2 + 4sx - 4s^2 = 0, \ \ da\ cui\ \ x = \frac{2}{3}s \ \ (e\ x = -2s \ \ non\ accettabile).$$

Pertanto lo spigolo del cubo è $\frac{2}{3}s$. Si ha quindi:

$$\frac{V(cubo)}{V(piramide)} = \frac{\left(\frac{2}{3}s\right)^3}{\frac{1}{3}s^2 \cdot 2s} = \frac{4}{9}$$

QUESITO 3

Se le funzioni f (x) e g(x), entrambe tendenti a 0, quando x→a, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{g(x)}{f(x)}$ *quando x→a. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.*

E' falso, poiché il Teorema di De L'Hôpital fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza del limite, ma non necessaria.

Controesempio:

$g(x) = x^2 \cdot sen\ \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x\ , \quad a = 0$

Osserviamo che esiste il limite $\frac{g(x)}{f(x)}$ per x che tende a zero, infatti:

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot sen\ \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot sen\ \frac{1}{x} = 0$ per il teorema del confronto.

Le ipotesi del teorema di De L'Hôpital non sono però tutte soddisfatte; infatti:

$g' = 2x sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ \ f' = 1\ ,\ \ \frac{g'}{f'} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ che non ammette limite per x che tende a zero in quando $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tende a zero ma $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non ammette limite (oscilla tra -1 ed 1).

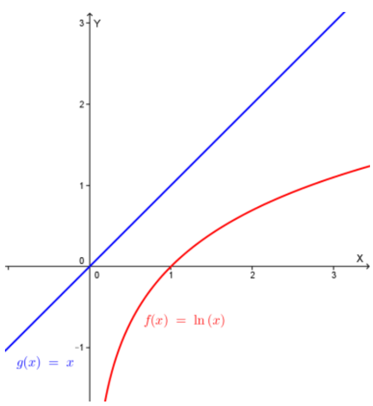
QUESITO 4

Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x \quad per\ x \to +\infty$ *è:*

[A] 0. *[B] un valore finito diverso da 0.* *[C]* $+\infty$. *[D]* $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Il limite è $+\infty$ perché, pur presentandosi il limite nella forma $+\infty - \infty$, l'infinito x domina sull'infinito lnx. Questo può essere verificato graficamente, osservando le due funzioni y=x e y=lnx:



Allo stesso risultato si può pervenire utilizzando la regola di De L'Hôpital per dimostrare che:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$; infatti, essendo verificate le condizioni del teorema, abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

La risposta corretta è quindi la [C].

QUESITO 5

Il limite della funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ $, per\ \ x \to 0$*, è uguale a 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.*

Si tratta di un limite notevole, che si deduce da un altro limite notevole:

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

Poniamo $e^x - 1 = t, da\ cui\ \ x = \ln(1+t)\, , con\ t \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{t}}\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

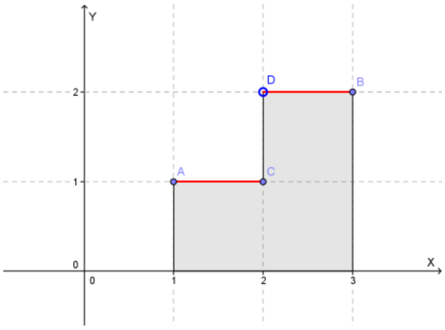
QUESITO 6

Si ricorda la seguente definizione*: «Considerata una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo I, ogni funzione, derivabile in I e tale che F '(x)=f (x), si dice primitiva di f (x) in I ». Stabilire se la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ \ 1 \le x \le 2 \\ 2 & se\ \ 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Ammette primitiva nell'intervallo [1; 3].

La funzione $f(x)$ non è continua nell'intervallo dato, poiché non lo è in x=2, essendo il limite sinistro uguale ad 1 ed il limite destro uguale a 2. Il grafico della funzione è il seguente:



Si può osservare graficamente che la funzione f(x) è integrabile nell'intervallo [1;3], pur non essendo continua, e risulta:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 1 + \lim_{a\to 2^+} \int_a^3 f(x)dx = 1 + 2 = 3$$

Siccome la F(x) deve essere derivabile (e quindi continua) nell'intervallo [1; 3], con $F'(x) = f(x)$, dovrà essere:

$$F(x) = \begin{cases} x + a & se \quad 1 \le x \le 2 \\ 2x + b & se \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Dovendo essere F continua in x=2, deve essere 2+a=4+b, da cui a-b=2 . Ma F(x) deve essere anche derivabile in x=2, quindi la derivata sinistra e la derivata destra in x=2 devono essere uguali, cioè: 1=2, che è impossibile.

La funzione f(x), pur essendo integrabile nell'intervallo [1; 3], non ammette primitiva in tale intervallo.

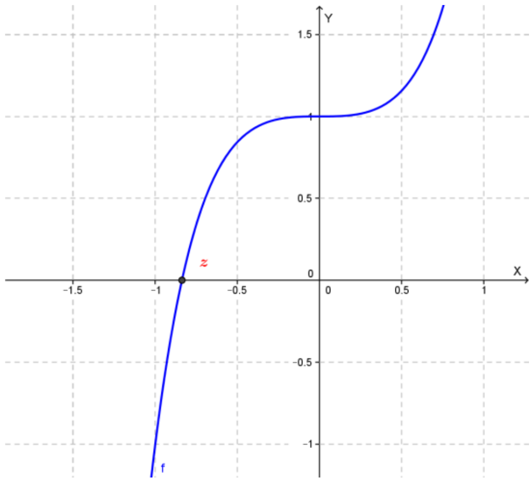
QUESITO 7

Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione: $x^5 + x^3 + 1 = 0$ *ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo* $[z;\ z+1]$ *al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.*

Consideriamo la funzione di equazione $f(x) = x^5 + x^3 + 1$. Si tratta di una funzione razionale intera, definita su tutto R, tende a più infinito per x che tende a più infinito e a meno infinito se x tende a meno infinito. Il grafico incontra l'asse y nel punto di ordinata 1. La derivata prima è: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ per ogni x: la funzione è quindi sempre crescente, pertanto il suo grafico taglia l'asse x in un solo punto, di ascissa negativa, poiché se x=0 risulta y=1.Siccome f(-1)=-1, lo zero z della funzione è compreso tra -1 e 0:

l'intervallo a cui appartiene la soluzione dell'equazione è [-1; 0].

Indichiamo il grafico qualitativo della funzione:



QUESITO 8

Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di 10^{-3}, della soluzione reale della precedente equazione.

Dobbiamo trovare un valore approssimato a meno di 10^{-3} della soluzione dell'equazione $x^5 + x^3 + 1 = 0$ nell'intervallo [-1; 0], che si può restringere, come si osserva dal grafico precedente, all'intervallo [-1; -0.5].

Consideriamo la funzione $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ e l'intervallo [a; b]=[-1; -0.5].
Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$, $f''(x) = 20x^3 - 6x^2 = 2x^2(10x - 3) < 0 \ \ in \ \ [-1; \ -0.5]$.

Possiamo quindi applicare il metodo delle tangenti. Osserviamo che risulta:

$f(a) = f(-1) = -1 < 0$; $f(b) = f(-0.5) > 0$ quindi il segno della derivata seconda è uguale al segno di f(a), quindi il punto iniziale dell'iterazione è $x_0 = a = -1$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

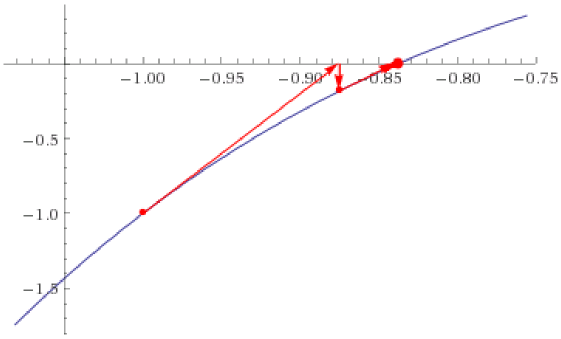
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{-1}{8} \cong -0.875$$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cong -0.84$, $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \cong -0.8376$,

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \cong -0.8376$

Quindi la radice richiesta, approssimata per difetto a meno di 10^{-3} è -0.837.

Diagramma di iterazione:



Proponiamo un algoritmo che risolve l'equazione data con l'approssimazione richiesta facendo ricorso al metodo di bisezione:

```
Algoritmo bisezione
      Leggi errore, a, b
      x1:=a
      x2:=b
      c:=(x1+x2)/2
      Se f(c)=0 allora scrivi "La radice è c" altrimenti ripeti
         Se f(c)*f(x1)<0 allora poni x2=c altrimenti poni x1=c
         Finchè (x2-x1)/2<eps oppure f(c)=0
      Scrivi c
Fine.
```

Indichiamo un possibile programma in Pascal (valido per la funzione X^5+x^3+1 = 0 e all'intervallo [-1;-0.5]). Tale programma è facilmente adattabile ad altra funzione e ad altro intervallo.

```
program bisezione;
Uses Crt;
Const    a=-1;
         b=-0.5;
Var      c:real;
         risposta:char;
Procedure Presentazione;
Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^5+X^3+1= 0    nell''intervallo [-1;-0.5]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-3) ');
  Writeln;writeln;
End;
Function  f(x:real):real;
Begin
  f:=x*x*x*x*x+x*x*x+1
End;
Procedure  Elabora;
Var   errore,x1,x2:real;
```

```
Begin
  errore:=exp(-3*ln(10));    (*10^(-3)*)
  x1:=a;         x2:=b;
  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
    x2:=c  ELSE   x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or (f(c)=0)
end;
Procedure Comunica;
 Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta , : ',c:10:3);
  Writeln
 End;
BEGIN (*main*)
Repeat
 Clrscr;
 Presentazione;
 Elabora;
 Comunica;
 Write('Ancora? (s/n)  ');
 Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']
END.
```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell'apposita finestra al seguente link*:*

http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php

QUESITO 9

Si considerino le seguenti equazioni:

$x' = ax - (a-1)y + 1, \quad y' = 2ax + (a-1)y + 2$

dove a è un parametro reale.
Determinare i valori di a per cui le equazioni rappresentano:
1) un'affinità,
2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice equivalente se conserva le aree).

1) Le equazioni rappresentano un'affinità se il determinante della matrice dei coeficienti è diverso da zero, cioè se:

$$\begin{vmatrix} a & -a+1 \\ 2a & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2a(1-a) = 3a^2 - 3a \neq 0\,, \quad a \neq 0 \;\; e \;\; a \neq 1$$

2) Il rapporto fra le aree di due figure affini è dato dal valore assoluto del suddetto determinante; quindi si ha un'affinità equivalente se:

$|3a^2 - 3a| = 1\,, \ \ 3a^2 - 3a = \pm 1, quindi:$

$3a^2 - 3a - 1 = 0$: $a = -\frac{\sqrt{21}}{6} + \frac{1}{2} \ \ e \ \ a = \frac{\sqrt{21}}{6} + \frac{1}{2}$

Oppure:

$3a^2 - 3a + 1 = 0, \qquad mai\ verificato.$

QUESITO 10

Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda «Antonio» e almeno una «Maria»?

Con 16 femmine, di cui solo due si chiamano Maria, possiamo formare 14x2=28 coppie diverse comprendenti una Maria e 1 coppia con due Maria: in totale abbiamo 29 coppie di femmine con almeno una Maria.

Con 12 maschi, di cui solo uno si chiama Antonio, possiamo formare 11 coppie comprendenti Antonio.

Le delegazioni con due femmine e due maschi comprendenti almeno una Maria e Antonio sono pari a 29x11=319. Le possibili delegazioni con due femmine e due maschi sono date dal prodotto fra il numero di coppie possibili fra le16 femmine (combinazioni di 16 oggetti a due a due) ed il numero di coppie possibili fra i 12 maschi (combinazioni di 11 oggetti a due a due):

numero coppie femmine: $C_{16,2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

numero coppie machi: $C_{12,2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

Numero totale di delegazioni: $120 \cdot 66 = 7920$

La probabilità richiesta è quindi:

$$p = \frac{319}{7920} = \frac{29}{120} \cong 0.040 = 4\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria