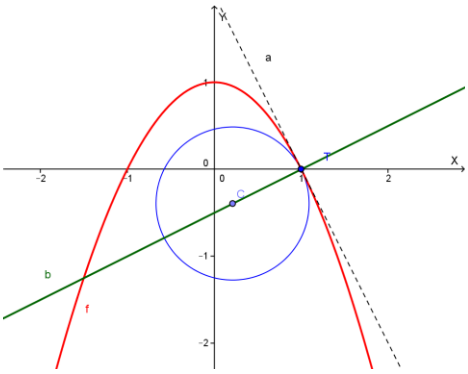
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2007 – PROBLEMA 1

Si consideri la funzione f definita da $f(x) = 1 - x^2$, *il cui grafico è la parabola* Γ .

1)

Si trovi il luogo geometrico Λ *dei centri (a; b) delle circonferenze che sono tangenti a* Γ *nel suo punto di ascissa* 1.

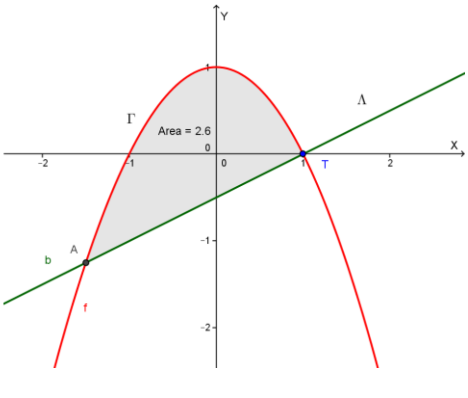
Le circonferenze richieste sono tangenti alla retta a, tangente alla parabola in T=(1; 0). Il centro C appartiene quindi alla retta b perpendicolare ad a in T.



Il coefficiente angolare della tangente in T alla parabola è $-2x_T = -2$; la perpendicolare a tale tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. La normale alla parabola in T (quindi il luogo dei centri delle circonferenze richieste) ha equazione: $y - 0 = \frac{1}{2}(x-1)$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2)

Si calcoli l'area del dominio piano delimitato da Λ *e* Γ.



Cerchiamo le ascisse delle intersezioni A e T fra le due curve:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}; \quad 1 - x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad ; \quad 2x^2 + x - 3 = 0; \quad x = -\frac{3}{2}; \quad x = 1$$

Quindi l'area richiesta è:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left[1 - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right] dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(\frac{3}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right]_{-\frac{3}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \left(-\frac{9}{4} + \frac{27}{24} - \frac{9}{16}\right) = \frac{125}{48} \ u^2 \cong \ 2.60 \ u^2 = Area$$

3)

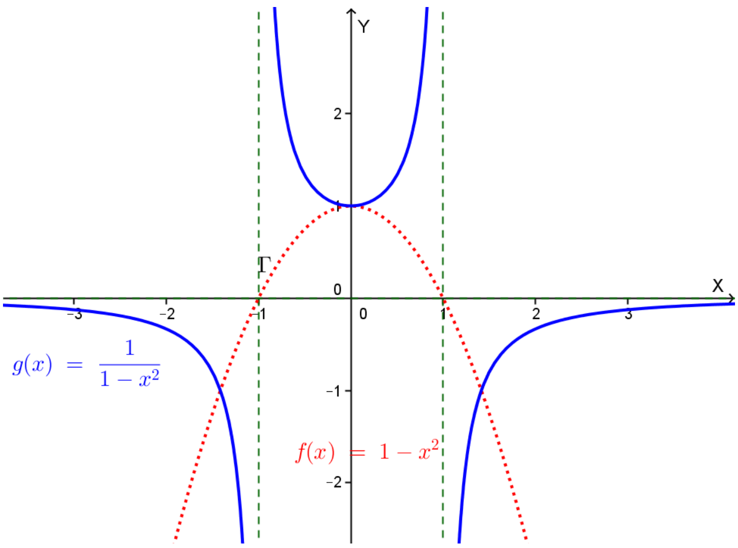
Si tracci il grafico della funzione $\frac{1}{f}$.

Risulta: $\boldsymbol{y = g(x) = \frac{1}{1-x^2}}$

Il grafico di tale funzione può essere facilmente dedotto dal grafico della parabola osservando quanto segue:

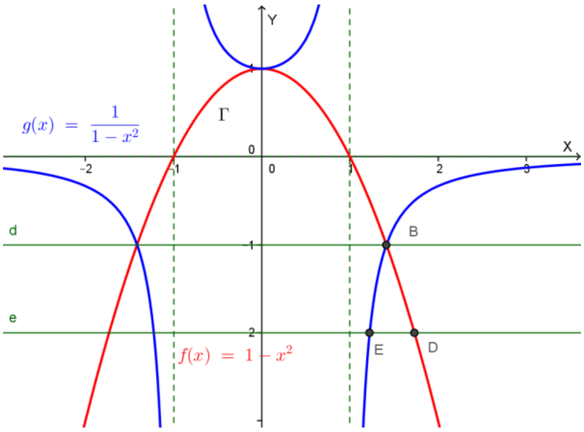
g è definita per $x \neq \pm 1$, è pari, è positiva se $1 - x^2 > 0$: $-1 < x < 1$. Ammette gli asintoti verticali x=1 e x=-1. Per x che tende a +/- infinito tende a 0^-. Quindi abbiamo l'asintoto orizzontale y=0. Se x=0 y=1.

Dove f cresce g decresce e viceversa, quindi: g è decrescente da meno infinito a -1 e da -1 a 0 e crescente da zero a +1 e da +1 a più infinito: x=0 è punto di minimo relativo con ordinata g(0)=1. Dalle informazioni raccolte possiamo tracciare il grafico di g:



4)

Si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $\frac{1}{f}$ nella striscia $-2 \leq y \leq -1$ e se ne calcoli l'area.



Le due aree sono uguali per la evidente simmetria delle curve. Calcoliamo l'area della regione del quarto quadrante, cercando le ascisse dei punti di intersezione fra le rette y=-1 e y=-2 con le due curve.

$B: \begin{cases} y = -1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}; \quad x = \sqrt{2}$ (comune alle due curve)

$D: \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}; \quad x = \sqrt{3} \quad ; \quad E: \begin{cases} y = -2 \\ y = \frac{1}{1 - x^2} \end{cases}; \quad -2 + 2x^2 = 1; \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Quindi l'area del dominio del quarto quadrante è data da:

$$Area = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1-x^2} - (-2)\right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [1 - x^2 - (-2)]\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1-x^2} + 2)\right] dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [3 - x^2]\, dx$$

Calcoliamo a parte il seguente integrale: $\int \frac{1}{1-x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2-1} dx$. Risulta:

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$ da cui: $1 = x(A+B) + A - B$ e, per il Principio d'identità dei polinomi:

$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$

Risulta quindi:

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = -\int \frac{1}{x^2-1}dx = -\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx = -\left[\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Si ha pertanto:

$$\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1-x^2} + 2)\right]dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} [3-x^2]\,dx = \left[-\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2x\right]_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} + \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(ln\left(\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) - ln\left(\frac{-\sqrt{\frac{3}{2}}+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}\right)\right) + \left(3\sqrt{3} - \sqrt{3} - (3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\ln\left(2\sqrt{6}-5\right)}{2} - \frac{\ln\left(2\sqrt{2}-3\right)}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{3}\right)\,u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria