Scuole italiane all'estero (Americhe) 2007 – PROBLEMA 2

Della parabola γ si sa che passa per i punti A (0, 2) e B (2, 0), ha l'asse parallelo all'asse y e volge la concavità nel verso negativo di tale asse; inoltre l'area del dominio piano delimitato da γ e dai segmenti OA e OB è $\frac{10}{3}$.

1)

Si determini l'equazione di γ e se ne tracci il grafico.

La parabola ha equazione del tipo: $y = ax^2 + bx + c$, con a<0.
Passaggio per A: c=2.
Passaggio per B: 0=4a+2b+c, quindi b=-2a-1. L'equazione è allora del tipo:

$y = ax^2 - (2a+1)x + 2$

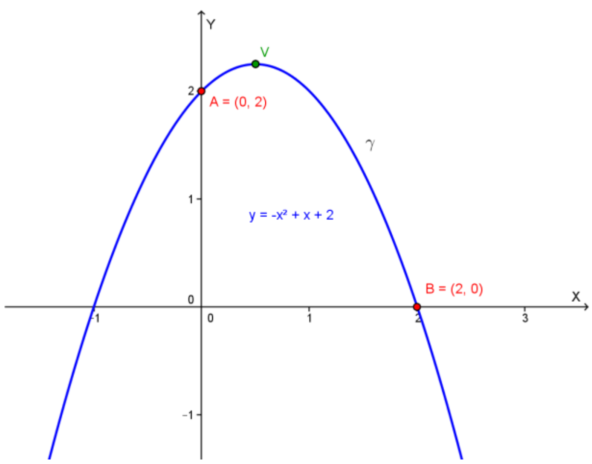
L'area del dominio piano indicato è data da:

$$\int_0^2 [ax^2 - (2a+1)x + 2]\,dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}(2a+1)x^2 + 2x\right]_0^2 = \frac{8}{3}a - 2(2a+1) + 4 =$$

$= -\frac{4}{3}a + 2 = \frac{10}{3},\ \ da\ cui\ \ -4a + 6 = 10,\ a = -1$. La parabola ha quindi equazione:

$$y = -x^2 + x + 2$$

La parabola ha vertice nel punto $V = \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, taglia l'asse y nel punto A e l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2. Il suo grafico è il seguente:



2)

La retta s di equazione $y = mx + 2$, dove m è un parametro reale, interseca γ in A e in C. Si esprimano in funzione di m le coordinate di C.

$$\begin{cases} y = mx + 2 \\ y = -x^2 + x + 2 \end{cases}; \quad -x^2 + x + 2 = mx + 2 \ ; \quad x^2 + (m-1)x = 0, \qquad x = 0 \ e \ x = 1 - m$$

Da $y = mx + 2$, con $x = 1 - m$ otteniamo: $y = m - m^2 + 2$. Quindi:

$$C = (1 - m; m - m^2 + 2)$$

3)

Si studi la funzione $f(m) = AC^2$ e se ne tracci il grafico λ.

Calcoliamo AC^2: $AC^2 = (1 - m - 0)^2 + (m - m^2 + 2 - 2)^2 = (1 - m)^2 + m^2(1 - m)^2$

$$f(m) = (1 - m)^2(1 + m^2) = (1 - 2m + m^2)(1 + m^2) = m^4 - 2m^3 + 2m^2 - 2m + 1$$

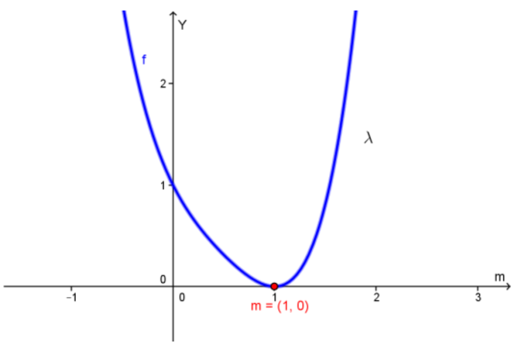
Si tratta di una funzione razionale intera di quarto grado, quindi è definita, continua e derivabile su tutto R e non presenta asintoti. Non è pari né dispari. Se m tende all'infinito la funzione tende a più infinito. L'asse delle ordinate è tagliato in y=1 e l'asse delle ascisse in m=1. La funzione è positiva per ogni m diverso da 1.

Studiamo la derivata prima:
$f'(m) = 2(1 - m)(-1)(1 + m^2) + (1 - m)(2m) = 2(1 - m)(-1 - m^2 + m)$

$f'(m) = 2(m - 1)(m^2 - m + 1) \geq 0 \ se \ m \geq 1 \ \ (m^2 - m + 1 > 0 \ per \ ogni \ m)$

Il grafico è quindi crescente per m>1 e decrescente per m<1: m=1 punto di minimo relativo (e assoluto) con valore f(1)=0.

Studiamo la derivata seconda:
$f''(m) = 2(m^2 - m + 1) + 2(m - 1)(2m - 2) = 2(3m^2 - 5m + 3) > 0$ per ogni m, quindi il grafico volge sempre la concavità verso l'alto)non ci sono flessi). Grafico:



4)

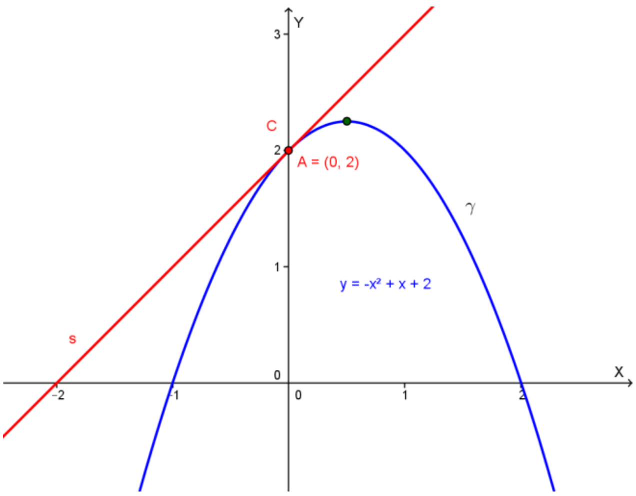
Si dica quale posizione assume la retta s in corrispondenza dell'estremo relativo della curva λ .

La retta s, in corrispondenza dell'estremo relativo (1; 0) si ha quando m=1, la sua equazione è quindi:

$s: y = x + 2$

Per tale valore di m si ha $C = (1 - m; m - m^2 + 2) = (0; 2) \equiv A$:
la retta s è quindi tangente alla parabola.

La situazione grafica è la seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria