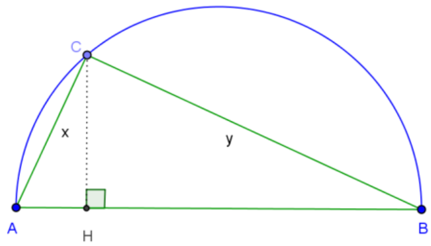
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2007 – Quesiti

QUESITO 1

Si dimostri che fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, quello isoscele ha l'area massima.

Il triangolo può essere inscritto in una circonferenza di diametro uguale all'ipotenusa.



$Area(ABC) = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2}$

Tale area è massima quando CH è massima, cioè quando CH è uguale al raggio della circonferenza (la base AB è costante). Quando CH=R il triangolo è isoscele (AC=BC).

QUESITO 2

Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe?

Due rette dello spazio si dicono sghembe se non sono complanari.
La distanza fra due rette sghembe è la lunghezza del segmento perpendicolare ad entrambe le rette, con gli estremi sulle due rette.

QUESITO 3

Si calcolino le radici dell'equazione: $3^{x+3} + 9^{x+1} = 10$

L'equazione è equivalente a:

$27 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{2x} - 10 = 0$; poniamo per comodita $3^x = t$. L'equazione diventa:

$9t^2 + 27t - 10 = 0$ che come soluzioni $t = -\frac{10}{3}$ $\; e \; t = \frac{1}{3}$. Quindi:

$3^x = -\dfrac{10}{3}: impossibile$

$3^x = \dfrac{1}{3}$: $x = -1$

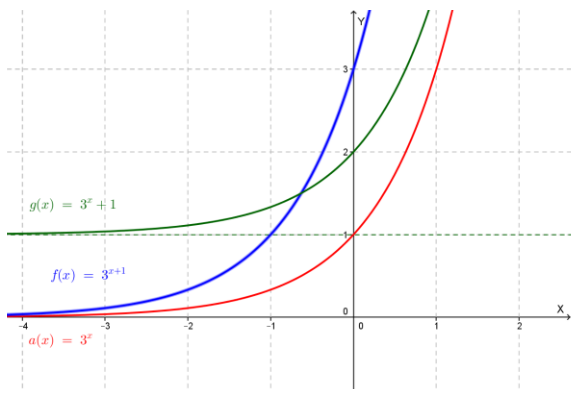
QUESITO 4

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

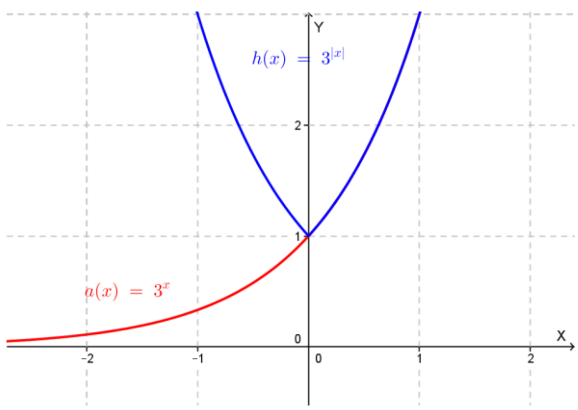
$$f: x \to 3^{x+1}\,; \quad g: x \to 3^x + 1\,; \quad h: x \to 3^{|x|} \;; \quad k: x \to 3^{-x}$$

Tutti i grafici richiesti sono deducibili dal grafico della funzione $y = a(x) = 3^x$.

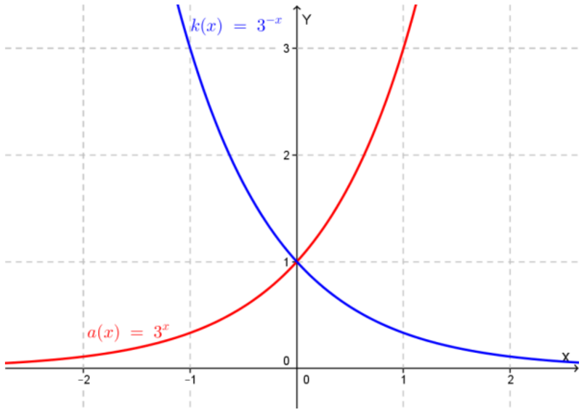
$f(x) = 3^{x+1} = a(x+1)$: si trasla verso sinistra di 1 il grafico di a(x)
$g(x) = 3^x + 1 = a(x) + 1$: si trasla verso l'alto di 1 il grafico di a(x)



$h(x) = 3^{|x|} = a(|x|)$: si conferma il grafico di a(x) che si trova a destra dell'asse y e lo si ribalta rispetto all'asse y.



$k(x) = 3^{-x} = a(-x)$: si ribalta il grafico di a(x) rispetto all'asse y.



QUESITO 5

Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Si dimostri che:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Operiamo un passaggio di base: $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$. Quindi:

$$\log_a b \cdot \log_b a = \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 1$$

QUESITO 6

Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione f(x) è, in ogni suo punto P, uguale al quadruplo della radice cubica dell'ascissa di P. Si determini f(x), sapendo che il grafico passa per il punto A(-1, 0).

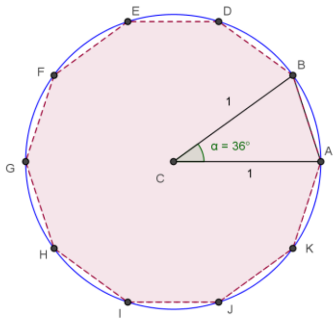
Risulta: $m = f'(x) = 4\sqrt[3]{x}$ quindi:

$$f(x) = \int 4\sqrt[3]{x}\,dx = 3\sqrt[3]{x^4} + C, \qquad con \quad f(-1) = 0, \qquad quindi: \quad 3 + C = 0, \quad C = -3$$

La funzione richiesta ha equazione: $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 3$.

QUESITO 7

Un cerchio ha raggio 1 metro. Quanto misura il lato del decagono regolare in esso inscritto? E quale è la misura del lato del decagono regolare circoscritto?

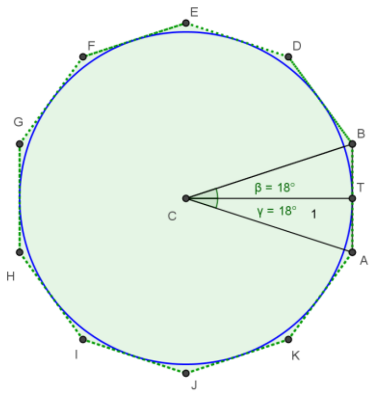


Per il teorema della corda, tenendo presente che in una circonferenza l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente, abbiamo:

$$AB = 2r\,sen(18°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(pari alla sezione aurea del raggio).

Calcoliamo ora il lato del decagono regolare circoscritto:



Il lato AB si ottiene nel seguente modo:

$$AB = 2BT = 2\big(CTtg(18°)\big) = 2tg(18°) = 2 \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

QUESITO 8

Il valore della seguente espressione:

$$\int_0^1 arccosx\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2arcsenx)\ dx$$

è $\frac{\pi-1}{2}$*. Spiegarlo in maniera esauriente.*

$$\int_0^1 arccosx\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2arcsenx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2arccosx\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2arcsenx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (2arccosx - 1 + 2arcsenx)\ dx\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 (2arccosx - 1 + 2arcsenx)\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 dx =$$

$= \int_0^1 (arccosx + arcsenx)\, dx - \frac{1}{2}[x]_0^1 = \int_0^1 \frac{\pi}{2} dx - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-1}{2}$

N.B.

Abbiamo utilizzato la proprietà $arccosx + arcsenx = \frac{\pi}{2}$, che deriva dal fatto che il seno ed il coseno di due angoli complementari sono uguali. Infatti, ponendo $arcsenx = z$ si ha $senz = x$; ma $senz = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = x,\ quindi: \frac{\pi}{2} - z = arccosx\ \ da\ cui$

$$\frac{\pi}{2} - arcsenx = arccosx,\ \ ossia:\ arccosx + arcsenx = \frac{\pi}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria