Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2007 – PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = a\log_{10} x + 1$ *, ove* a *è un parametro reale.*

1)

Dopo aver precisato il campo di esistenza di f si stabilisca per quali valori di a *la funzione* f *è crescente.*

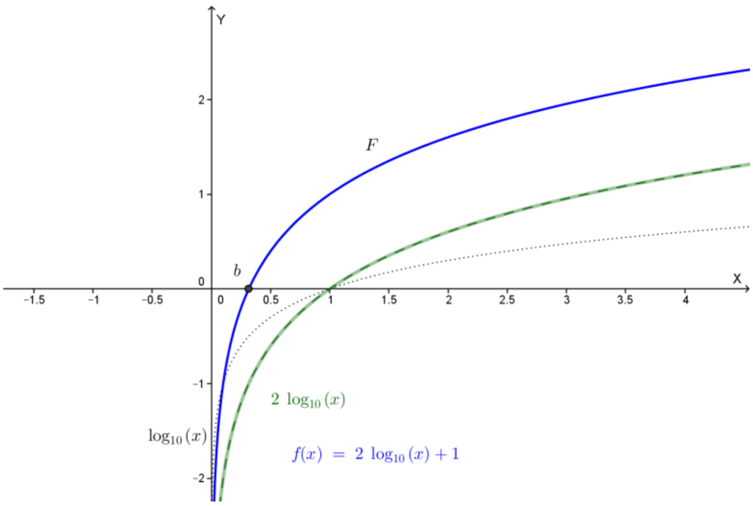
Il campo di esistenza di f è x>0.

Calcoliamo la derivata prima della funzione: $f'(x) = \frac{a}{ln10} \cdot \frac{1}{x} > 0\ se\ a > 0\ (con\ x > 0)$
Quindi: se a>0 la funzione è crescente in tutto il dominio x>0.
Se a<0 la funzione è sempre decrescente.
Se a=0 la funzione equivale a f(x)=1, quindi è costante per ogni x.
In conclusione: la funzione è crescente per a>0.

2)

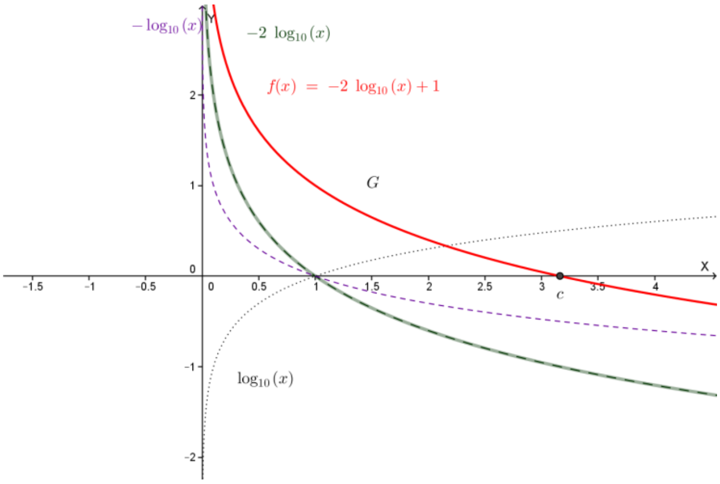
Si disegnino i grafici F e G di f corrispondenti, rispettivamente, ai valori a = 2 e a = −2 e siano b e c le ascisse delle loro rispettive intersezioni con l'asse x.

Se a=2: $f(x) = 2\log_{10} x + 1$ ed il suo grafico F si ottiene dal grafico di $y = \log_{10} x$ mediante una dilatazione verticale di fattore 2 ed una successiva traslazione verticale di 1. Grafico di F:



Cerchiamo b: $2\log_{10} x + 1 = 0$, $\log_{10} x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{10}} = b$

Se a=-2: $f(x) = -2\log_{10} x + 1$ ed il suo grafico G si ottiene dal grafico di $y = \log_{10} x$ mediante un ribaltamento rispetto all'asse x, una dilatazione verticale di fattore 2, ed una successiva traslazione verticale di 1. Grafico di G:

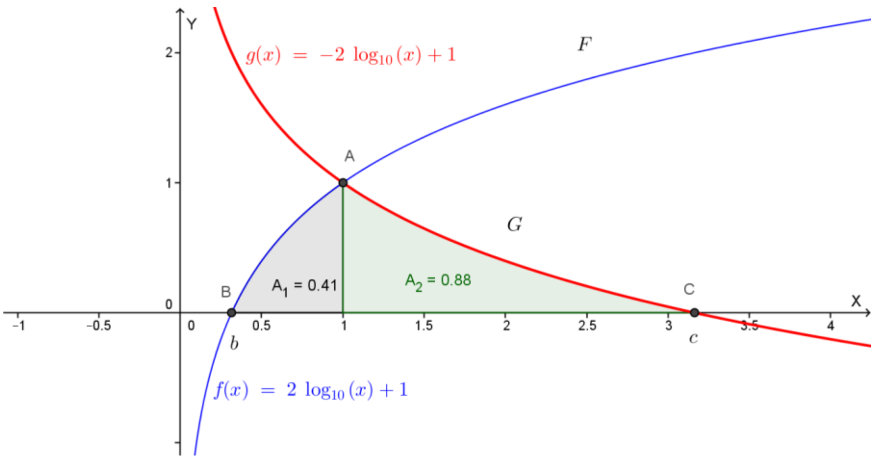


Cerchiamo c: $-2\log_{10} x + 1 = 0$, $\log_{10} x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{10} = c$

3)

Si calcoli l'area del triangolo mistilineo di base l'intervallo [b, c] e vertice il punto d'intersezione tra F e G e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato.

Abbiamo la seguente situazione grafica:



Cerchiamo l'intersezione A tra F e G: $2\log_{10} x + 1 = -2\log_{10} x + 1$, $x = 1$ e $y = 1$.
L'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} [2\log_{10} x + 1]\, dx + \int_{1}^{\sqrt{10}} [-2\log_{10} x + 1]\, dx$$

Cerchiamo una primitiva di $\log_{10} x = \frac{1}{ln10} lnx$.
Integrando per parti abbiamo:

$\int lnx\, dx = xlnx - x + C$, quindi $\int \log_{10} x\ dx = \frac{1}{ln10}(xlnx - x) + C$. Pertanto:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} [2\log_{10} x + 1]\, dx + \int_{1}^{\sqrt{10}} [-2\log_{10} x + 1]\, dx = \left[\frac{2}{ln10}(xlnx - x) + x\right]_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^{1} +$$

$$+\left[\frac{-2}{ln10}(xlnx - x) + x\right]_{1}^{\sqrt{10}} = \left[-\frac{2}{ln10} + 1 - \frac{2}{ln10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} ln\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) - \frac{1}{\sqrt{10}}\right] +$$

$$+\left[\frac{-2}{ln10}(\sqrt{10}ln\sqrt{10} - \sqrt{10}) + \sqrt{10} - \left(\frac{2}{ln10}\right) - 1\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{5} - 2\right)\log_{10} e + 1\right] + \left[(2\sqrt{10} - 2)\log_{10} e - 1\right] = \left(\frac{11\sqrt{10}}{5} - 4\right)\log_{10} e \cong 1.28\, u^2 = Area$$

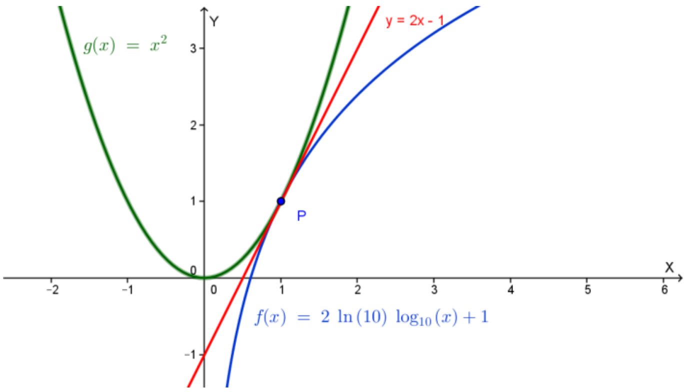
4)

Sia $g(x) = x^2$. Si determini il valore di a per cui f e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.

Abbiamo le due funzioni $g(x) = x^2$ e $f(x) = a\log_{10} x + 1$. Le due funzioni hanno la stessa tangente per x=1 se:

$$\begin{cases} g(1) = f(1) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ (2x)_{x=1} = \left(\frac{a}{ln10} \cdot \frac{1}{x}\right)_{x=1} \end{cases} \quad ; \quad 2 = \frac{a}{ln10} \quad ; \quad a = 2ln10$$

Graficamente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria