## Scuole italiane all'estero (Calendario australe ) 2007 – PROBLEMA 2

*Si consideri la funzione f così definita:*

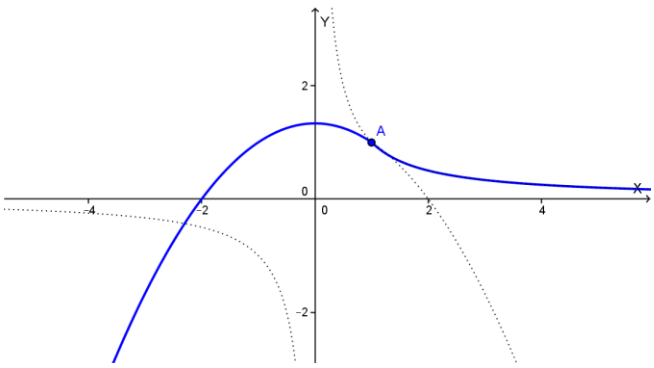
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{3} & se\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$$

### 1)

*Si disegni il grafico di f.*

Per $x \leq 1$ abbiamo la parabola di equazione: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$, che ha la concavità verso il basso, vertice sull'asse y con ordinata 4/3 e intersezioni con l'asse x nei punti con ascissa le soluzioni dell'equazione: $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3} = 0,\ \ x^2 = 4,\ \ \ x = \pm 2.$

Per $x > 1$ abbiamo l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$.
Il grafico di f è quindi:




### 2)

*Si dica se f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio ( o teorema di Lagrange) – da Giuseppe Lagrange [Torino, 25 gennaio 1736 – Parigi, 10 aprile 1813] sull'intervallo [0; 2] e quali sono, se esistono, gli eventuali valori medi in tale intervallo.*

Dobbiamo verificare se la funzione è continua nell'intervallo chiuso *[0; 2]* e derivabile nell'aperto (0; 2). Il punto da analizzare è x=1.
Continuità:
$f(1) = 1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{4-x^2}{3} = 1\ ,\ \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$: continua.

Derivabilità:

Se x<1: $f'(x) = -\frac{2}{3}x$;  $f'_-(1) = -\frac{2}{3}$

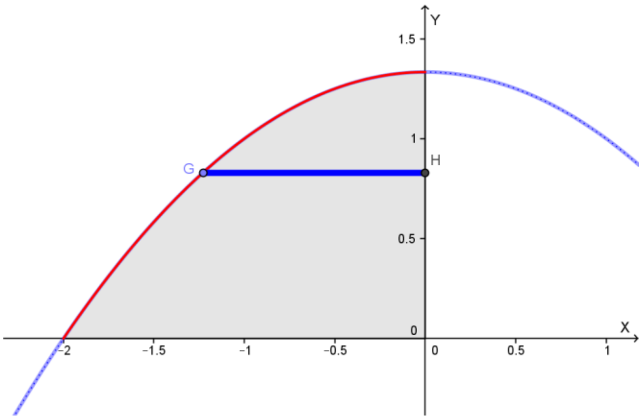
Se x>1: $f'(x) = -1/x^2$ ;  $f'_+(1) = -1$ : $NON\ derivabile$

Quindi NON sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange.

**3)**

*Il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.*

Il dominio è rappresentato nella seguente figura:




Il volume del solido si ottiene mediante il seguente integrale:

$$V = \int_0^{\frac{4}{3}} A(y)\, dy$$

dove A(y) è l'area del quadrato di lato $GH$ .

Essendo $y = \frac{4-x^2}{3}$ ,  $x^2 = 4 - 3y = A(y)$. Quindi:

$$A(y) = x^2 = 4 - 3y$$

$$V = \int_0^{\frac{4}{3}} A(y)\, dy = \int_0^{\frac{4}{3}} (4 - 3y)\, dy = \left[4y - \frac{3}{2}y^2\right]_0^{\frac{4}{3}} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}\ u^2 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria