# Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2007 – Quesiti

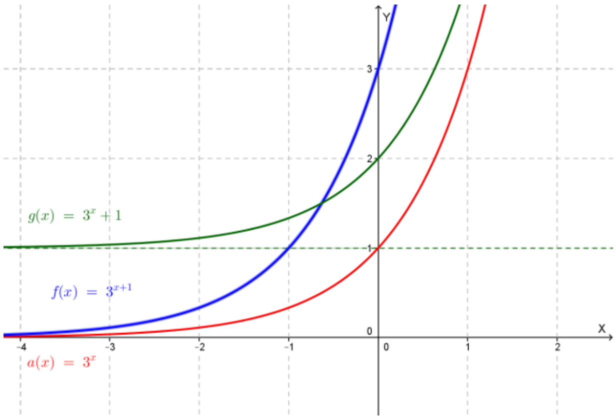
## QUESITO 1

*Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:*

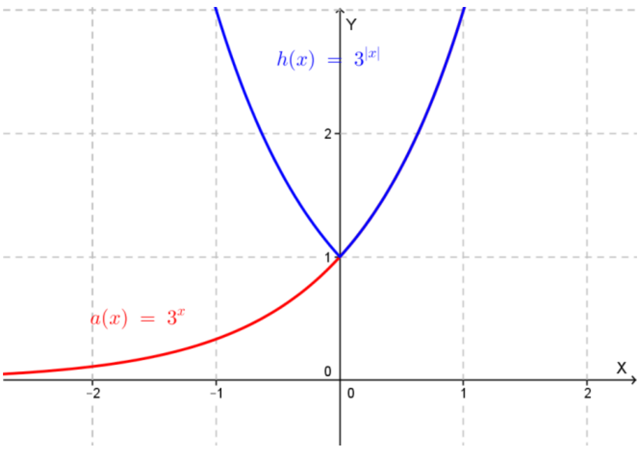
$$f\colon x \to 3^{x+1}\ ; \quad g\colon x \to 3^x + 1\ ; \quad h\colon x \to 3^{|x|}\ ; \quad k\colon x \to 3^{-x}$$

Tutti i grafici richiesti sono deducibili dal grafico della funzione $y = a(x) = 3^x$.

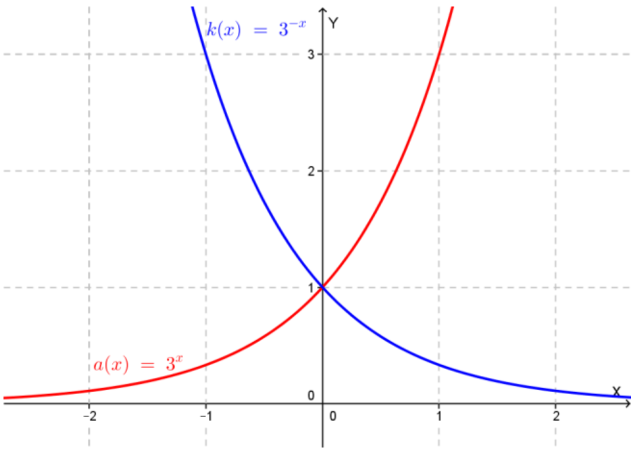
$f(x) = 3^{x+1} = a(x+1)$: si trasla verso sinistra di 1 il grafico di a(x)
$g(x) = 3^x + 1 = a(x) + 1$: si trasla verso l'alto di 1 il grafico di a(x)




$h(x) = 3^{|x|} = a(|x|)$: si conferma il grafico di a(x) che si trova a destra dell'asse y e lo si ribalta rispetto all'asse y.



$k(x) = 3^{-x} = a(-x)$: si ribalta il grafico di a(x) rispetto all'asse y.




## QUESITO 2

*Quante cifre ha il numero* $5^{59}$ *nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.*

Osserviamo che $log(5^{59}) = 59\log(5) \cong 41.24$, quindi la parte intera di $log(5^{59})$ è 41; pertanto $5^{59}$ ha 42 cifre (ricordiamo che la parte intera del logaritmo decimale di un numero è uguale al numero delle cifre diminuito di 1).

## QUESITO 3

*Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S.*

Il volume di una sfera di raggio R è $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; la variazione di V rispetto ad R è la derivata di V rispetto ad R, quindi:

$$\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 = Superficie\ sfera$$

## QUESITO 4

*Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo* $\binom{n}{m}$ *e si risolva l'equazione:*

$$2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2} \quad con\ \ x \in N$$

$\binom{n}{m}$ è il simbolo del cosiddetto "coefficiente binomiale" ed il termine deriva dal fatto che con esso si possono indicare i coefficienti dello sviluppo della potenza del binomio $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}$.

Con questo simbolo si indicano anche le "combinazioni semplici di n oggetti ad m ad m", date da:

$$\binom{n}{m} = C_{n,m} = \frac{D_{n,m}}{m!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

(n ed m sono numeri naturali, con $n > 0 \;\; ed \;\; n \geq m$.

Risolviamo ora l'equazione data:

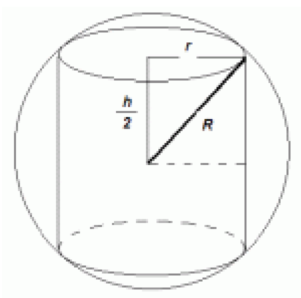
$$2\binom{x}{2} = 3\binom{x-1}{2} \quad con \;\; x \in N$$

Deve essere $x \geq 2 \;\; e \;\; x-1 \geq 2$: $quindi \; x \geq 3$ e x intero.

$$2 \cdot \frac{x(x-1)}{2!} = 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2!} \;\; , \quad 2x(x-1) = 3(x-1)(x-2), \;\; 2x = 3x-6, \quad x = 6$$

## QUESITO 5

*La capacità di un serbatoio è la stessa di quella del cilindro circolare retto di volume massimo inscrivibile in una sfera di 2 metri di diametro. Quale è la capacità in litri del serbatoio?*




Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con h l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è dato da: $V(cilindro) = \pi r^2 h$ . Ma risulta:

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ quindi: $V(cilindro) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = f(h)\,, \;\; con\; 0 \leq h \leq 2R$

Tale volume è massimo se lo è $y = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$; calcoliamo la derivata prima:

$$y' = R^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(-\frac{1}{2}h\right) = -\frac{3}{4}h^2 + R^2 \geq 0 \ \ se \quad h^2 \leq \frac{4}{3}R^2 \quad , \ -R\sqrt{\frac{4}{3}} \leq h \leq R\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Quindi, con le limitazioni su h, la funzione è crescente se $0 < h < R\sqrt{\frac{4}{3}}$ e decrescente se $R\sqrt{\frac{4}{3}} < h < 2R$: la funzione ha quindi un massimo (assoluto) per $h = R\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.
Per tale valore di h si ha: $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}R^2 = \frac{2R^2}{3}$ , $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R è quello di altezza $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ e raggio di base $\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

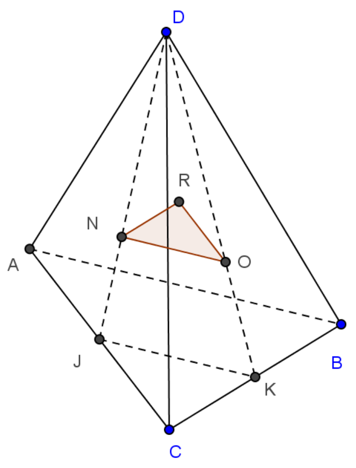
Con R=1 m abbiamo: $h = \frac{2}{3}R\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,m$ ed $r = \frac{R\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,m$
Quindi il volume del cilindro è:

$$V(cilindro) = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \pi\left(\frac{4}{9}\right)\sqrt{3}\ \ m^3 \cong 2.418\,m^3 \cong 2418\,dm^3 \cong 2418\,l$$

## QUESITO 6

*Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro.*

Sia NOR una faccia del tetraedro interno. N è il baricentro del triangolo ACD, quindi (per una nota proprietà) DN=2NJ (essendo DJ mediana); analogamente risulta: DO=2OK. Quindi, per il teorema di Talete, NO è parallelo a JK, che è parallelo ad AB: quindi NO è parallelo ad AB.
In modo analogo si dimostra che RO è parallelo ad AC e che NR è parallelo a BC: il piano NOR è quindi parallelo al piano ABC.



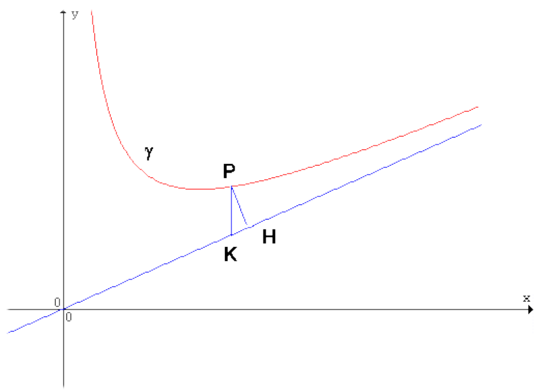

Lo stesso ragionamento può essere fatto per le altre facce del tetraedro interno.

Osserviamo che dalla similitudine dei triangoli DNO e DJK segue che $DN = \frac{2}{3}DJ$, quindi:
$NO = \frac{2}{3}JK = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}AB\right) = \frac{1}{3}AB$: lo spigolo del tetraedro interno è un terzo dello spigolo del tetraedro esterno.

# QUESITO 7

*Si dia una definizione di “asintoto” – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e si fornisca un esempio di funzione f(x) il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.*

Si dice che la curva $\gamma$ (eventualmente grafico di una funzione di equazione y=f(x)) ammette la retta r come asintoto se la distanza del generico punto P della curva dalla retta r tende a zero quando P si allontana indefinitamente su g.



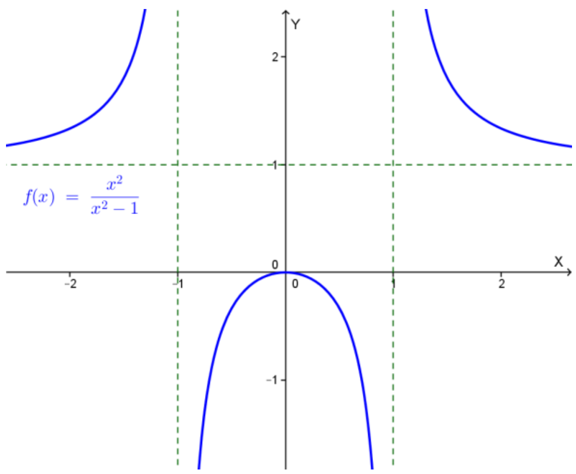

Per una trattazione completa sugli asintoti si veda la seguente pagina:

http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

Diamo ora un esempio di funzione che presenta un asintoto orizzontale e due asintoti verticali:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Questa funzione ha l’asintoto orizzontale y=1 e gli asintoti verticali x=-1 e y=1:



## QUESITO 8

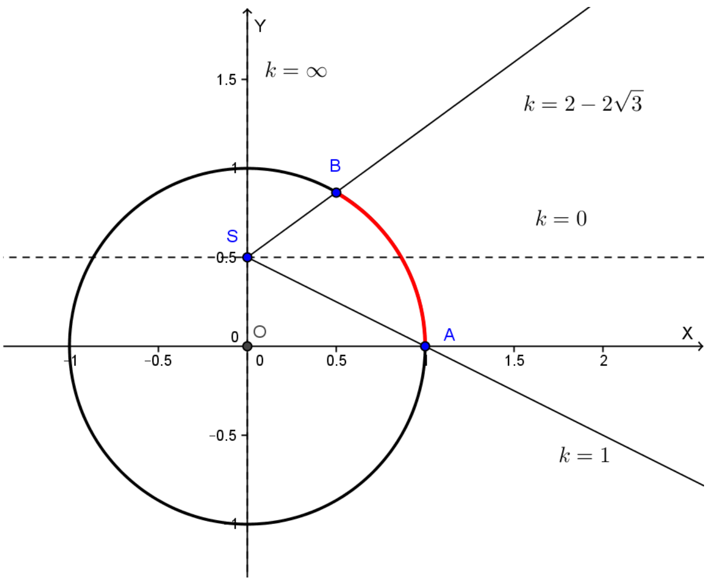
*La risoluzione di un problema assegnato conduce all'equazione* $2senx + k\cos x = 1$ *ove k>0 e* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ *. Si discutano le possibili soluzioni del problema.*

Posto X=cosx e Y=senx, la nostra equazione corrisponde al seguente sistema:

$$\begin{cases} 2Y + kX = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ k > 0 \\ \frac{1}{2} \leq X \leq 1, \; 0 \leq Y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$2Y + kX = 1$ rappresenta un fascio proprio di rette con generatrici $2Y - 1 = 0$ (per k=0) e $X = 0$ (per $k = \infty$); quindi ha centro in $S = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ L'arco di circonferenza che può essere intersecato ha estremi $A = (1{,}0)$ $e$ $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Cerchiamo i valori di k corrispondenti alle rette per A e B:

retta per A: k=1; retta per B: $\sqrt{3} + \frac{1}{2}k = 1, \; k = 2 - 2\sqrt{3} < 0$




Tenendo presente che k>0 abbiamo;

1 soluzione per $0 < k \leq 1$

Con la collaborazione di Angela Santamaria