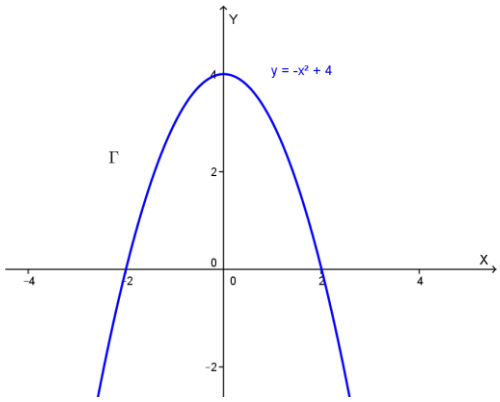
Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva) 2007

PROBLEMA 2

Si consideri la parabola Γ *grafico della funzione f definita da* $f(x) = 4 - x^2$.



a)

Si trovi il punto P di Γ *del primo quadrante degli assi cartesiani la somma delle cui coordinate è massima.*

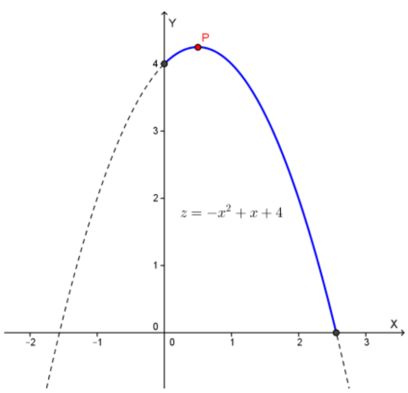
Posto P=(x; y), con $y = 4 - x^2$, $x > 0,\ y > 0$ deve essere:

$x + (4 - x^2) = z = max$

$z = -x^2 + x + 4$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso e ascissa del vertice data da: $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$

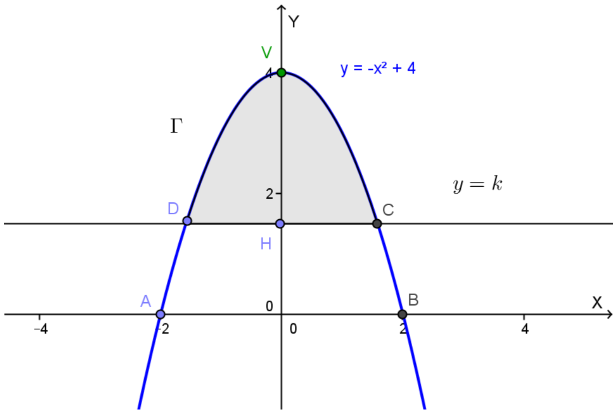
La somma delle coordinate di P è massima quando la sua ascissa è ½: $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$.

Situazione grafica:



b)

Si determini il valore di k per cui la retta y = k dimezza l'area del segmento parabolico di base AB, ove A e B sono le intersezioni di Γ *con l'asse x.*



L'area S(CD) del segmento parabolico di base CD deve essere la metà dell'area S(AB) del segmento parabolico di base AB. Ma, per il teorema di Archimede è:

$$S(AB)=\frac{2}{3}AB\cdot OV=\frac{2}{3}(4)(4)=\frac{32}{3}$$

Cerchiamo le intersezioni C e D della retta y=k con la parabola:

$$\begin{cases} y=k \\ y=4-x^2 \end{cases} \; ; \quad 4-x^2=k\,,\quad x^2=4-k\,,\quad x=\pm\sqrt{4-k}\quad con\ \ 0<k<4$$

Risulta quindi: $CD=2\sqrt{4-k}$, pertanto:

$$S(CD)=\frac{2}{3}CD\cdot HV=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{4-k}\right)(4-k)$$

Dovrà essere: $S(AB)=2S(CD)$, $\frac{32}{3}=\frac{8}{3}\left(\sqrt{4-k}\right)(4-k)$, $4=\left(\sqrt{4-k}\right)(4-k)$,

$16=(4-k)^3$, $4-k=\sqrt[3]{16}$, $k=4-\sqrt[3]{16}\cong 1.48$

c)

Si tracci il grafico della funzione $1/f$ *.*

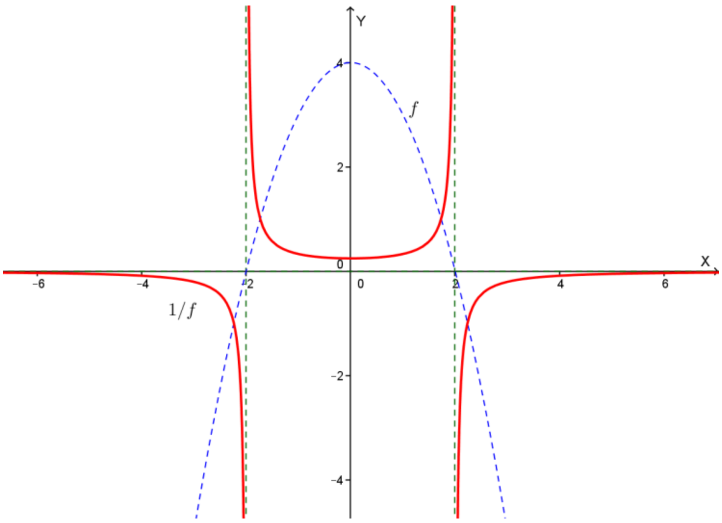
Abbiamo: $y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4-x^2}$

Il grafico di questa funzione può essere dedotto da quello della parabola data, tenendo presente quanto segue:

dominio: ogni x diversa da +2 e -2; x=2 e x=-2 sono asintoti verticali.

Il segno di 1/f coincide con il segno di f.
Dove f cresce, 1/f decresce e viceversa.
Per x che tende all'infinito 1/f tende a 0^{-}: y=0 è asintoto orizzontale.
Per x=0 f è massima e vale 4, 1/f è minima e vale ¼.

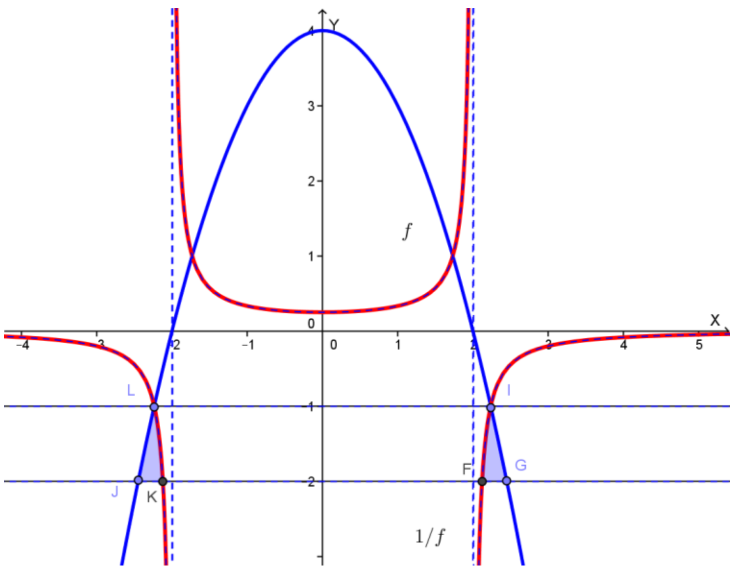
Il grafico di 1/f è il seguente:



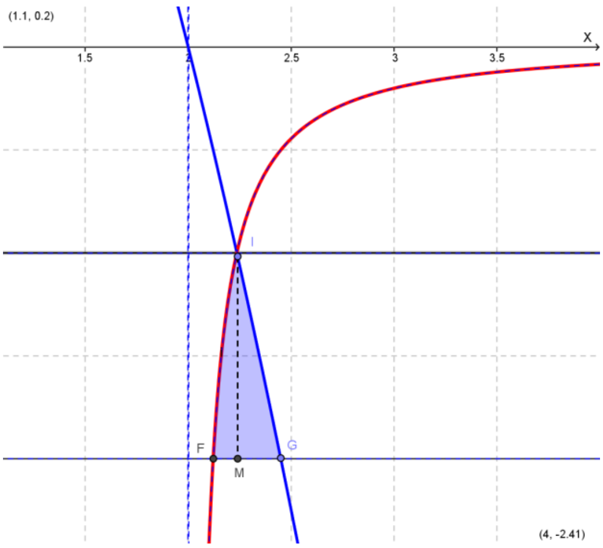
d)

Si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di 1/ f nella striscia $-2 \leq y \leq -1$ e se ne calcoli l'area.

I due domini FGI e KJL hanno la stessa area, per l'evidente simmetria delle due curve.



Calcoliamo l'area del dominio FGI del quarto quadrante, di seguito ingrandito:



Cerchiamo le ascisse dei punti F,G ed I:

$I: \begin{cases} y = -1 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}; \quad -x^2 + 4 = -1\,, \quad x^2 = 5, \quad x_I = \sqrt{5}$

$G: \begin{cases} y = -2 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}; \quad -x^2 + 4 = -2\,, \quad x^2 = 6, \quad x_G = \sqrt{6}$

$F: \begin{cases} y = -2 \\ y = \dfrac{1}{4 - x^2} \end{cases}; \quad 4 - x^2 = -\dfrac{1}{2}\,, \quad x^2 = \dfrac{9}{2}, \quad x_F = \sqrt{4.5}$

Abbiamo:

$Area(FIG) = Area(FIM) + Area(IMG) =$

$$= \int_{\sqrt{4.5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4 - x^2} - (-2) \right) dx + \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \left(4 - x^2 - (-2)\right) dx =$$

$$= \int_{\sqrt{4.5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4 - x^2} + 4 \right) dx + \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} (8 - x^2)\, dx$$

Cerchiamo una primitiva di $y = \frac{1}{4-x^2}$.

Risulta:

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x}=\frac{A(2+x)+B(2-x)}{(2-x)(2+x)}: \quad 1=x(A-B)+2A+2B \quad da\ cui:$$

$$\begin{cases} A-B=0; \quad A=B \\ 2A+2B=1\ , \quad B=\frac{1}{4}; \end{cases} \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Pertanto:

$$\int \frac{1}{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2-x}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2+x}dx=-\frac{1}{4}\ln|2-x|+\frac{1}{4}\ln|2+x|+C=\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+C$$

Avremo allora:

$$\int_{\sqrt{4.5}}^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4-x^2}+4\right)dx+\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}(8-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+4x\right]_{\sqrt{4.5}}^{\sqrt{5}}+\left[8x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right|+4\sqrt{5}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{2+\sqrt{4.5}}{2-\sqrt{4.5}}\right|-4\sqrt{4.5}\right\}+\left\{8\sqrt{6}-\frac{1}{3}6\sqrt{6}-8\sqrt{5}+\frac{1}{3}5\sqrt{5}\right\}\cong$$

$$\cong 0.2994+0.5352\cong 0.8346\ u^2=Area(FIG)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria