Scuole italiane all'estero (Europa) 2007 – PROBLEMA 1

Si consideri la parabola Γ *d'equazione* $f(x) = x^2 + 1$.

1)

Sia A(a, b) un punto di Γ. *Si dimostri che, qualsiasi sia* $a \in Z$ *, l'ordinata b non è mai un numero divisibile per 3.*

Risulta $b = a^2 + 1$; dobbiamo dimostrare che, con a intero, b non è mai un multiplo di 3. Supponiamo che a sia un multiplo di 3: $a = k \cdot 3$, con k intero. Si ha quindi:
$b = 9k^2 + 1$, che non è divisibile per 3 (non si può raccogliere il 3 …)
Se a non è un multiplo di 3 vuol dire che il resto della divisione di a per 3 è 1 oppure 2; si ha quindi: $a = (3q) + 1$ oppure $a = (3q) + 2$. Nel primo caso si ha:

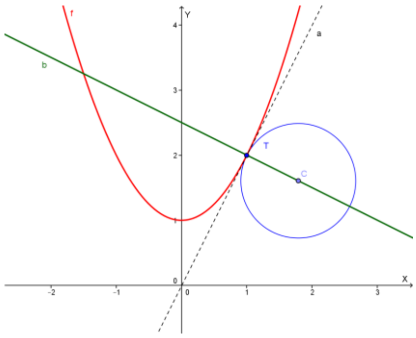
$b = (3q + 1)^2 + 1 = (9q^2 + 6q) + 2$: non divisibile per 3, poiché non posso raccogliere 3.

Nel secondo caso: $b = (3q + 2)^2 + 1 = (9q^2 + 12q) + 5$: non divisibile per 3, perché non posso raccogliere 3.

2)

Sia C (h, k) il centro di una circonferenza tangente a Γ *nel punto (1; 2). Si determini l'equazione del luogo geometrico descritto da C.*

Le circonferenze richieste sono tangenti alla retta a, tangente alla parabola in T=(1; 2). Il centro C appartiene quindi alla retta b perpendicolare ad a in T.



Il coefficiente angolare della tangente in T alla parabola è $2x_T = 2$; la perpendicolare a tale tangente ha coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$. La normale alla parabola in T (quindi il luogo dei centri delle circonferenze richieste) ha equazione: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

3)

Si tracci il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$*. La funzione ha punti di flesso?*

Risulta: $\boldsymbol{y = g(x) = \frac{1}{x^2+1}}$

Il grafico di tale funzione può essere facilmente dedotto dal grafico della parabola osservando quanto segue:

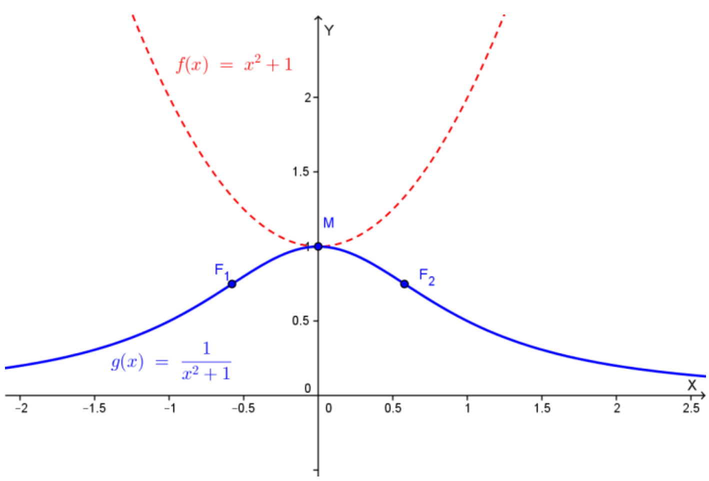
g è definita su tutto R, è sempre positiva ed è pari. I limiti all'infinito sono uguali a 0^+, quindi abbiamo l'asintoto orizzontale y=0. Dove f cresce g decresce e viceversa, quindi: g è crescente da meno infinito a zero e decrescente da zero a più infinito: x=0 è punto di massimo relativo (ed assoluto) ed il massimo vale g(0)=1. Dalle informazioni raccolte si deduce che g ha dei flessi (in numero pari), che possiamo determinare studiando la derivata seconda:

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad g''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x(4x)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0, \qquad 1 + x^2 - 4x^2 \leq 0$$

$$3x^2 \geq 1: \quad x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad vel \quad x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Il grafico di g quindi volge la concavità verso l'alto se $x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad vel \quad x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e verso il basso se $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Quindi $x \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di flesso (con ordinata ¾).

Il grafico di g è quindi il seguente:



4)

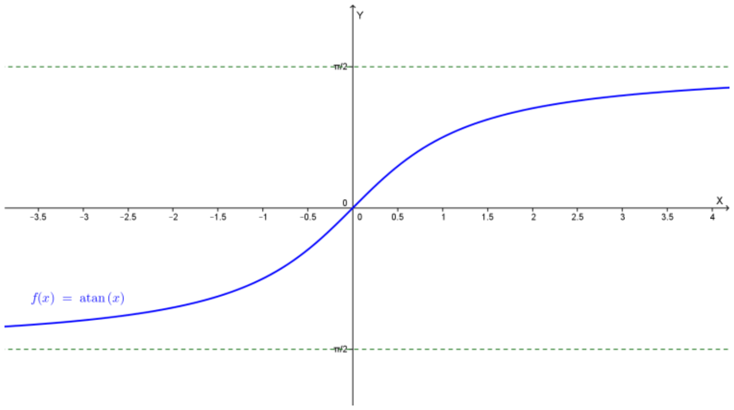
Sia $F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)}\, dx$. Si calcoli il limite per t tendente ad infinito di $F(t)$ e si interpreti il risultato geometricamente.

Il limite richiesto rappresenta l'area della regione (illimitata) compresa fra il grafico della funzione $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, l'asse della x e l'asse delle y. Calcoliamone il valore:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(x)}\, dx = \int_0^t \frac{1}{x^2+1}\, dx = [arctg(x)]_0^t = arctg(t)$$

$\lim_{t\to+\infty} arctg(t) = \frac{\pi}{2}$

Grafico dell'arcotangente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria