Scuole italiane all'estero (Europa) 2007 – PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f così definita:

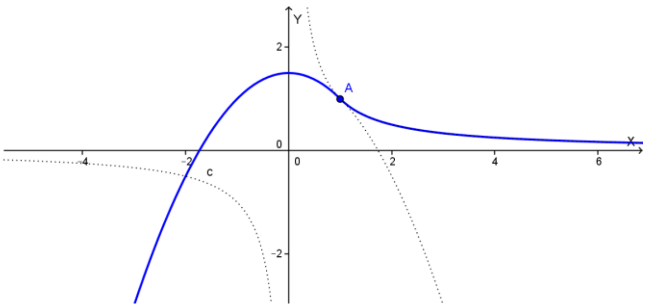
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & se\ x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & se\ x>1\end{cases}$$

1)

Si disegni il grafico di f.

Per $x \le 1$ abbiamo la parabola di equazione: $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$, che ha la concavità verso il basso, vertice sull'asse y con ordinata 3/2 e intersezioni con l'asse x nei punti con ascissa le soluzioni dell'equazione: $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}=0,\ \ x^2=3,\ \ \ x=\pm\sqrt{3}$.

Per $x>1$ abbiamo l'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$.
Il grafico di f è quindi:



2)

Si mostri che f soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo [0; 2] ; si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne espliciti il significato geometrico.

Dobbiamo verificare che la funzione è continua nell'intervallo chiuso *[0; 2]* e derivabile nell'aperto (0; 2). Il punto da analizzare è x=1.
Continuità:
$f(1)=1,\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3-x^2}{2}=1\ ,\ \ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$: continua.
Derivabilità:
Se x<1: $f'(x)=-x;\ \ f'_-(1)=-1$
Se x>1: $f'(x)=-1/x^2\ ;\ \ f'_+(1)=-1: derivabile$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange.

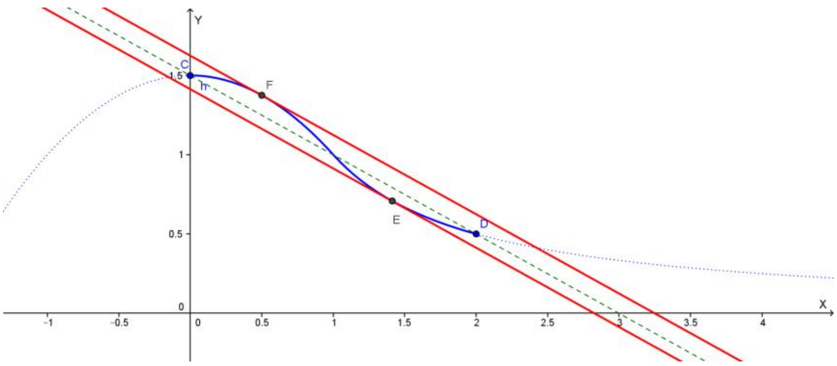
I valori forniti dal teorema sono i punti c tali che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \qquad \frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c), \quad \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}=f'(c)$$

Se x<1, $f'(c)=-c=-\frac{1}{2}$: $c=\frac{1}{2}$
Se x>1, $f'(c)=-\frac{1}{c^2}=-\frac{1}{2}$: $c=\sqrt{2}$

I valori medi sono: $f'(c)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ ed $f'(c)=f'(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

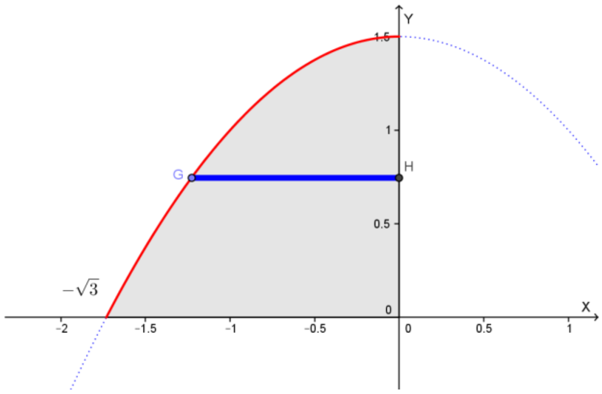
Il significato geometrico del teorema di Lagrange è il seguente: esiste almeno un punto c interno all'intervallo dato in cui la tangente è parallela alla retta che congiunge gli estremi (a; f(a)) e (b(; f(b)) del grafico della funzione.



3)

Il dominio piano del II quadrante delimitato dal grafico di f e dagli assi coordinati è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse y, sono tutte quadrate. Si calcoli il volume di S.

Il dominio è rappresentato nella seguente figura:



Il volume del solido si ottiene mediante il seguente integrale:

$$V = \int_0^{\frac{3}{2}} A(y)\, dy$$

dove A(y) è l'area del quadrato di lato GH .

Essendo $y = \frac{3-x^2}{2}$, $x^2 = 3 - 2y = A(y)$. Quindi:

$$A(y) = x^2 = 3 - 2y$$

$$V = \int_0^{\frac{3}{2}} A(y)\, dy = \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2y)\, dy = [3y - y^2]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\ u^2 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria