Scuole italiane all'estero (Europa) 2007 – Quesiti

QUESITO 1

Si calcolino le radici dell'equazione: $5^x \cdot 3^{1-x} = 10$.

L'equazione è equivalente a:

$5^x \cdot \frac{3}{3^x} = 10, \quad 3 \cdot 5^x = 10 \cdot 3^x$ e passando ai logaritmi decimali:

$\log(3 \cdot 5^x) = \log(10 \cdot 3^x), \quad log3 + xlog5 = log10 + xlog3, \quad x = \frac{1 - log3}{log5 - log3}$.

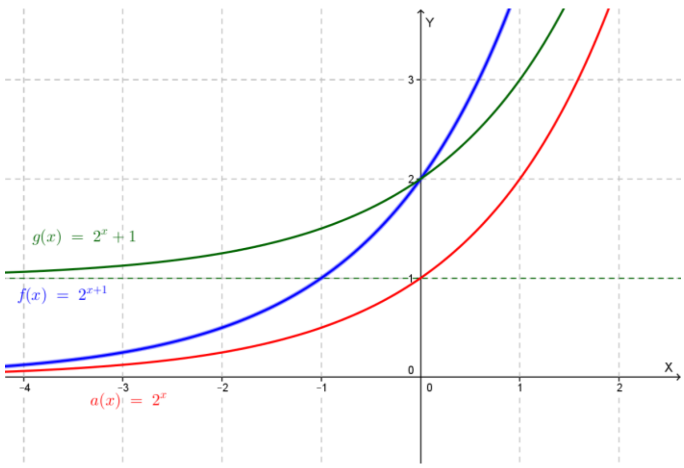
QUESITO 2

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

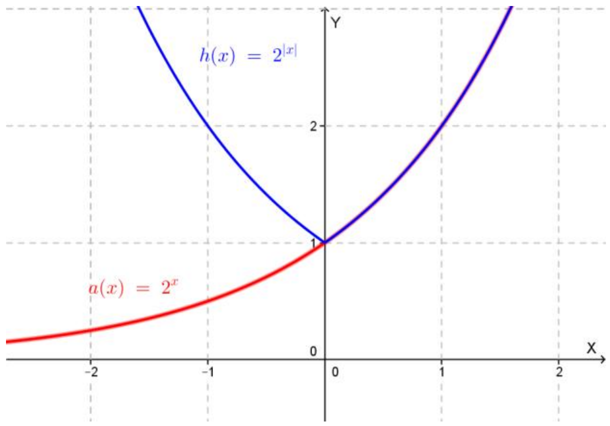
$$f: x \to 2^{x+1}\ ; \quad g: x \to 2^x + 1\ ; \quad h: x \to 2^{|x|}\ ; \quad k: x \to 2^{-x}$$

Tutti i grafici richiesti sono deducibili dal grafico della funzione $y = a(x) = 2^x$.

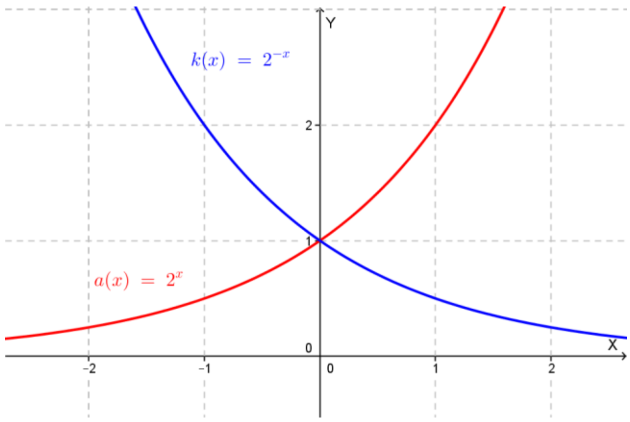
$f(x) = 2^{x+1} = a(x+1)$: si trasla verso sinistra di 1 il grafico di a(x)
$g(x) = 2^x + 1 = a(x) + 1$: si trasla verso l'alto di 1 il grafico di a(x)



$h(x) = 2^{|x|} = a(|x|)$: si conferma il grafico di a(x) che si trova a destra dell'asse y e lo si ribalta rispetto all'asse y.



$k(x) = 2^{-x} = a(-x)$: si ribalta il grafico di a(x) rispetto all'asse y.



QUESITO 3

Quante cifre ha il numero 7^{60} nella rappresentazione decimale? Motiva esaurientemente la risposta.

Osserviamo che $log(7^{60}) = 60\ log7 \cong 50.71$, quindi la parte intera di $log(7^{60})$ è 50; pertanto 7^{60} ha 51 cifre (ricordiamo che la parte intera del logaritmo decimale di un numero è uguale al numero delle cifre diminuito di 1).

QUESITO 4

La formula seguente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

è dovuta a Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita. Per dimostrarla può essere utile ricordare che è:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si illustri il ragionamento seguito.

Ricordiamo la formula relativa allo sviluppo del binomio di Newton:

$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$, quindi:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{n^2-n}{n^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2.1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2.1}{n^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) =$$

Passando al limite per n che tende a più infinito del primo e dell'ultimo membro abbiamo:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$e = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$ c.v.d.

QUESITO 5

Si vuole che delle due radici reali dell'equazione: $x^2+2(h+1)x+m^2h^2=0$ *una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri h e m?*

Intanto imponiamo che le radici siano reali: $\frac{\Delta}{4}=0,\quad (h+1)^2-m^2h^2\geq 0\quad (1)$

Siccome una radice deve essere il doppio dell'altra deve risultare:

$x_1+x_2=3x_2=-\frac{b}{a}=-2(h+1),\quad x_2=-\frac{2}{3}(h+1)$; imponiamo che tale valore sia radice:

$$\frac{4}{9}(h+1)^2+2(h+1)\left[-\frac{2}{3}(h+1)\right]+m^2h^2=0,\quad \frac{4}{9}(h+1)^2-\frac{4}{3}(h+1)^2+m^2h^2=0$$

$-\frac{8}{9}(h+1)^2+m^2h^2=0\quad (2)$

Mettendo insieme le condizioni (1) e (2) abbiamo:

$$\begin{cases}(h+1)^2-m^2h^2\geq 0\\ -\frac{8}{9}(h+1)^2+m^2h^2=0\end{cases};\quad \begin{cases}(h+1)^2\geq m^2h^2\\ \frac{8}{9}(h+1)^2=m^2h^2\end{cases};\quad \begin{cases}(h+1)^2\geq \frac{8}{9}(h+1)^2\\ \frac{8}{9}(h+1)^2=m^2h^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}h^2+2h+1\geq 0;\quad (h+1)^2\geq 0,\ per\ ogni\ h\\ m^2=\dfrac{\frac{8}{9}(h+1)^2}{h^2}=\frac{8}{9}\left(\frac{h+1}{h}\right)^2,con\ h\neq 0\ (se\ h=0{:}\ \frac{8}{9}=0\ impossibile)\end{cases}$$

Quindi deve essere:

$$m^2=\frac{8}{9}\left(\frac{h+1}{h}\right)^2,con\ h\neq 0,da\ cui:\quad m=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{h+1}{h}\right)$$

Quindi la relazione fra m ed h è: $m=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\left(\frac{h+1}{h}\right),\quad con\ h\neq 0.$

QUESITO 6

Il coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione f(x) è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Si determini f(x), sapendo che f(0)=4.

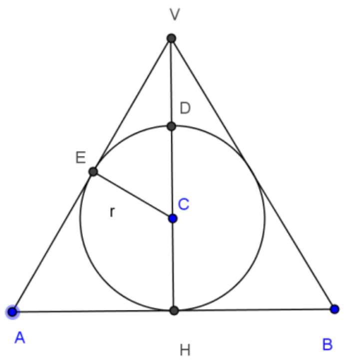
Risulta: $m = f'(x) = 2x$ quindi:

$$f(x) = \int 2xdx = x^2 + C, \qquad con \quad f(0) = 4, quindi: \quad 4 = C$$

La funzione richiesta ha equazione: $f(x) = x^2 + 4$.

QUESITO 7

Fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r , quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$.



Poniamo VD=x (con x>0). Dalla similitudine fra i triangoli AHV e VCE risulta:
VE:CE=VH:AH.
VC=r+x;
$VE = \sqrt{VC^2 - EC^2} = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}$;
VH=2r+x; quindi:

$$AH = \frac{CE \cdot VH}{VE} = \frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

Risulta poi: VA:VH=VC:VE, da cui

$$VA = \frac{VH \cdot VC}{VE} = \frac{(x+r)(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}$$

La superficie laterale è:

$$S = \pi \cdot AH \cdot VA = \cdots = \pi\, r \frac{x^2 + 3rx + 2r^2}{x}$$

Questa espressione è minima se lo è:

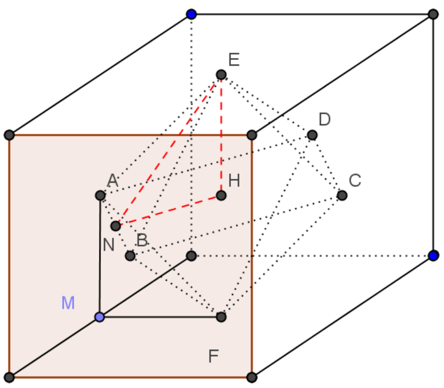
$y = \dfrac{x^2 + 3rx + 2r^2}{x}$; la derivata è data da:

$y' = \dfrac{x^2 - 2r^2}{x^2} \geq 0$ per $x^2 \geq 2r^2$, cioè, data la limitazione della x, $x > r\sqrt{2}$; quindi la funzione è crescente per tali x e decrescente per $0 < x < r\sqrt{2}$ e pertanto in $x = r\sqrt{2}$ ha il minimo, come richiesto.

QUESITO 8

Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? Si può calcolare il rapporto fra le aree del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposta affermativa, effettuare il calcolo.

Consideriamo l'ottaedro che ha i vertici nei centri delle facce di un cubo. Verifichiamo che l'ottaedro è regolare



Indicando con ℓ lo spigolo del cubo, notiamo che AF, che congiunge i centri di due facce del cubo perpendicolari, è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele AMF (dove M è il punto medio dello spigolo), con AM = MF = $\ell/2$; quindi $AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}$.
Un ragionamento analogo si può fare per qualsiasi altro spigolo dell'ottaedro. Quindi tutti gli spigoli dell'ottaedro valgono $\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$; le facce dell'ottaedro sono quindi triangoli equilateri uguali ed è perciò regolare.

Cerchiamo ora il rapporto tra il volume del cubo e quello dell'ottaedro.

Volume cubo = ℓ^3
Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3}$
Siccome $AB = AF = \frac{\ell}{2}\sqrt{2}, \quad EH = \frac{EF}{2} = \frac{\ell}{2}$ risulta:

Volume ottaedro = $2 \cdot \frac{AB^2 \cdot EH}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{6}$

Il rapporto richiesto fra i volumi è pertanto:

$$\frac{V(cubo)}{V(ottaedro)} = 6$$

Calcoliamo ora il rapporto fra le aree delle superfici totali del cubo e dell'ottaedro.

$S(cubo) = 6l^2;$

$S(ottaedro) = 8\left(area\ triangolo\ equilatero\ di\ lato\ \frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = l^2\sqrt{3}$

Quindi:

$$\frac{S(cubo)}{S(ottaedro)} = \frac{6l^2}{l^2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria