

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $|\overline{AB}| = k$ e l'angolo $\widehat{BAC} = \pi/3$. Con centro in B e raggio x si tracci l'arco di circonferenza le cui intersezioni con i lati \overline{BA} e \overline{BC} siano, rispettivamente, D e E . Con centro in A si tracci poi l'arco di circonferenza tangente in D alla circonferenza già tracciata e che intersechi in F il cateto \overline{AC} . Si chiede:

- Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.
- Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $DECF$.
- Si trovino i valori massimo e minimo di $S(x)$.

Problema 2

Si consideri la parabola Γ grafico della funzione f definita da $f(x) = 4 - x^2$.

- Si trovi il punto P di Γ del primo quadrante degli assi cartesiani la somma delle cui coordinate è massima.
- Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area del segmento parabolico di base \overline{AB} , ove A e B sono le intersezioni di Γ con l'asse x .
- Si tracci il grafico della funzione $1/f$.
- Si considerino i due domini piani, ricadenti nel III e IV quadrante, delimitati dai grafici di f e di $1/f$ nella striscia $-2 \leq y \leq -1$ e se ne calcoli l'area.

Questionario

- Si vuole che delle due radici dell'equazione

$$x^2 + 2(b+1)x + m^2b^2 = 0$$

una risulti doppia dell'altra. Quale relazione deve sussistere tra i parametri b e m ?

- Sia $f(x) = x + \sin x$ per ogni x . Si trovino i punti x in corrispondenza dei quali il grafico di f in $(x, f(x))$ abbia coefficiente angolare nullo.
- La risoluzione di un dato problema conduce all'equazione

$$k \sin x + \cos x = 2k \quad \text{ove} \quad k \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si discutano le possibili soluzioni del problema.

- Le nuove targhe automobilistiche sono costituite da 2 lettere, seguite da 3 cifre, seguite a loro volta da 2 lettere. Sapendo che le lettere possono essere scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone, si calcoli quante automobili si possono immatricolare in questo modo.
- Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono.

6. Si considerino un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Si può calcolare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro? In caso di risposte affermative, effettuare il calcolo.
7. Le misure dei lati di un triangolo sono 18, 24 e 30 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
8. Si determini, al variare di k , il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x + k = 0.$$