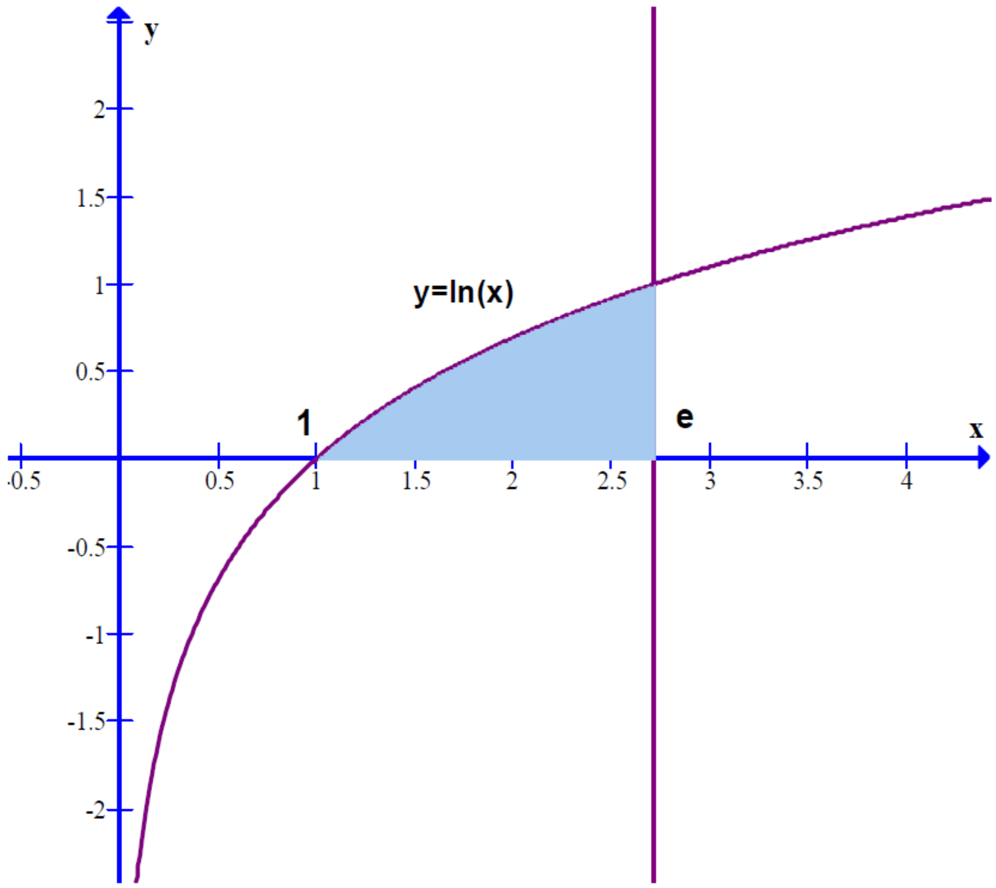
Liceo della comunicazione 2007 – QUESITI

QUESITO 1



Le sezioni date suddividono il solido in questione in solidi approssimabili con prismi aventi per base un rettangolo lati ln(x) e 3ln(x) e altezza dx.
Il volume di ognuno dei suddetti prismi può quindi essere espresso nella forma:
$dV = \left(3 \cdot \ln^2 x\right) dx$.

Il volume richiesto si ottiene sommando questi infiniti "volumetti", quindi integrando dV tra 1 e e:

$$V = \int_1^e dV = \int_1^e \left(3 \cdot \ln^2 x\right) dx$$

Integrando per parti si ottiene la primitiva

$$\int \left(3 \cdot \ln^2 x\right) dx = 3\left(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x\right)$$

Risulta quindi

$$V=\int_1^e \left(3\cdot \ln^2 x\right)dx = 3\left[\left(x\ln^2 x-2x\ln x+2x\right)\right]_1^e = 3(e-2)\approx 2{,}15$$

(valore approssimato per difetto a meno di 1 centesimo).

QUESITO 2

Ponendo $a=80 \quad b=60 \quad c=40$, per il teorema del coseno si ha:

$a^2=b^2+c^2-2bc\bullet\cos\alpha$, da cui $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$, quindi $\alpha=104°29'$

In modo analogo si trova:

$\cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{11}{16}$, quindi $\beta=46°34'$

$\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7}{8}$, quindi $\gamma=28°57'$

QUESITO 3

Considero le tre circonferenze con centro in ognuno dei vertici del triangolo e raggio uguale a 1; la zona "favorevole" a P è la parte interna al triangolo ed esterna ai tre settori circolari interni al triangolo (in tali settori cadono i punti che distano da un vertice meno di 1).

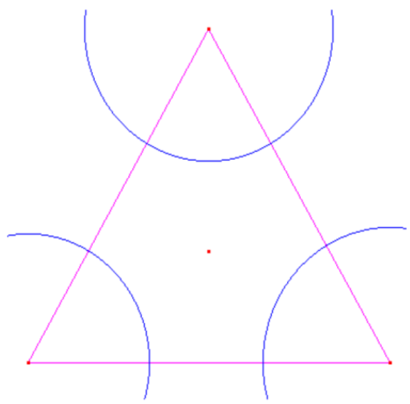
L'are complessiva dei tre settori è uguale a: $3\cdot(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\pi}{2}$

L'area "favorevole" è data dalla differenza tra l'area del triangolo e quella dei trei settori:

$$\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}$$

La probabilità richiesta è data dal rapporto tra l'area "favorevole" e l'area "possibile":

$$\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}}\approx 0.597\approx 60\%$$



QUESITO 4

Indichiamo con R il raggio di base del cono, con h la sua altezza e con a=1 l'apotema.
Il volume del cono è:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Risulta poi: $h^2 + R^2 = 1$ (*)

Il volume è massimo se lo è $z = R^2 h$.

Siccome $h^2 + R^2$ è costante $z = R^2 h = R^2 (h^2)^{\frac{1}{2}}$ è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, ovvero:

$\frac{R^2}{1} = \frac{h^2}{\frac{1}{2}}$, da cui $R^2 = 2h^2$ e dalla (*) $h = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Il Volume massimo è quindi:

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} m^3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot 10^3 dm^3 \approx$$

$\approx 403\ dm^3 = 403$ litri

QUESITO 5

$y = x^3 + 8 = f(x)$, intervallo [-2 ; 2] = [a ; b]
La funzione, razionale intera, è continua nell'intervallo chiuso e derivabile nell'aperto; sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange: esiste almeno un punto c nell'aperto (-2 ; 2) tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La derivata della funzione è: $y' = 3x^2$, inoltre f(2) = 16, f(-2) = 0, b - a = 4
I punti c si ottengono risolvendo l'equazione

$3x^2 = 4$, da cui $c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$, valori entrambi accettabili.

I valori medi richiesti sono: $f(c) = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} + 8$.

Il significato geometrico del teorema di Lagrange è il seguente:
nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto c dell'aperto (a ; b) tale che la tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa c è parallela alla congiungente gli estremi del grafico stesso (a;f(a)) e (b;f(b)); il valor medio f'(c) non è altro che il coefficiente angolare di quest'ultima retta.

QUESITO 6

Nel primo caso (prima la maggiorazione e poi la diminuzione) il prezzo finale è:

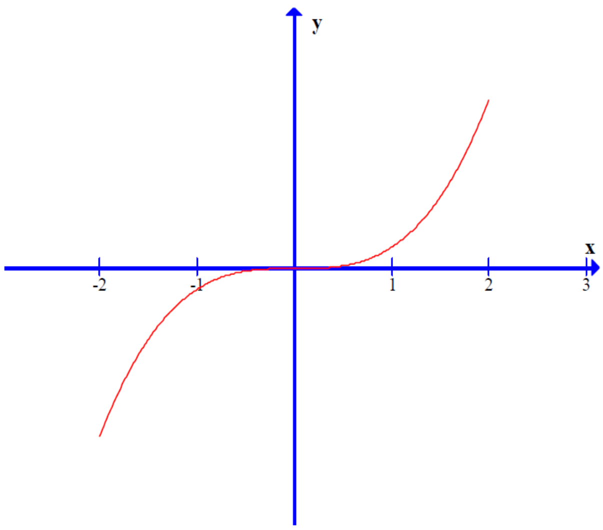
$$\left(p+\frac{6}{100}p\right)-\frac{6}{100}\left(p+\frac{6}{100}p\right)=p-\frac{36}{1000}\cdot p=0{,}9964\cdot p$$

Nel secondo caso il prezzo finale è:

$$\left(p-\frac{6}{100}p\right)+\frac{6}{100}\left(p-\frac{6}{100}p\right)=p-\frac{36}{1000}\cdot p=0{,}9964\cdot p$$

Quindi il prezzo finale è lo stesso (minore di quello di partenza).

QUESITO 7



Essendo la funzione dispari f(- x) = - f(x), quindi f(x) = - f(- x).

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{0} -f(-x)dx=-\int_{-2}^{0} f(-x)dx$$

ponendo -x=t, gli estremi diventano 2 e 0 e dx=-dt, cioè:

$$-\int_{-2}^{0} f(-x)dx=-\int_{2}^{0} f(t)(-dt)=\int_{2}^{0} f(t)dt=-\int_{0}^{2} f(t)dt=-\int_{0}^{2} f(x)dx$$

Pertanto $\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx=0$

Calcoliamo il secondo integrale richiesto:

$$\int_{-2}^{2}(3+f(x))dx=\int_{-2}^{2}3dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx=[3x]_{-2}^{2}+0=12$$

QUESITO 8

x = denaro iniziale giocatore 1
y = denaro iniziale giocatore 2
z = denaro iniziale giocatore 3

Dopo la prima giocata:

denaro giocatore 1 = x - y -z
denaro giocatore 2 = 2y
denaro giocatore 3 = 2z

Dopo la seconda giocata:

denaro giocatore 1 = 2(x - y -z)
denaro giocatore 2 = 2y - (x -y -z) -2z = 3y -x- z
denaro giocatore 3 = 4z

Dopo la terza giocata:

denaro giocatore 1 = 4(x - y -z) =24
denaro giocatore 2 = 2(3y -x- z) =24
denaro giocatore 3 = 4z - 2(x - y -z) - (3y -x- z) = 7z -x -y = 24

Si tratta quindi di risolvere il sistema;

$$\begin{cases} x-y-z=6 \\ 3y-x-z=12 \\ 7z-x-y=24 \end{cases}$$

che ha la soluzione **x = 39, y = 21, z = 12**

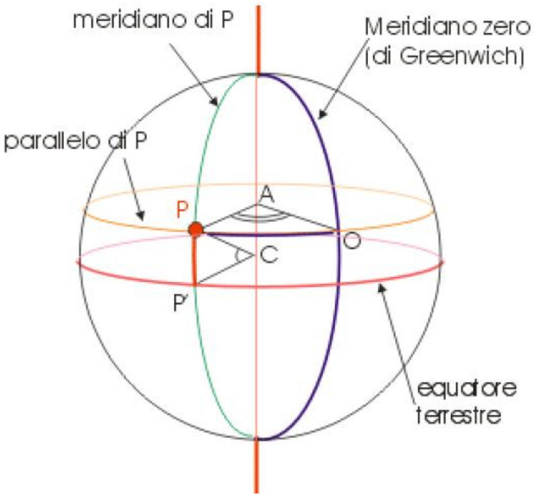
QUESITO 9

L'equazione data, con le condizioni $n \geq 4$ ed $n \geq 5$ equivale a:

$$4\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=15\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}$$

che ammette le soluzioni n=2 ed n=3 non accettabili e le soluzioni dell'equazione $n^2-16n+60=0$, che sono **n = 6 ed n = 10** accettabili.

QUESITO 10



Piano equatoriale: piano perpendicolare all'asse e passante per il centro della Terra
Parallelo: circonferenza ottenuta intersecando un piano parallelo a quello equatoriale con la superficie sferica
Poli terrestri: intersezioni tra superficie sferica e asse di rotazione
Meridiano (geografico): semicirconferenza massima passante per i poli
Merdiano zero (o fondamentale): meridiano di riferimento (Greenwich)
Parallelo zero (di riferimento): parallelo equatoriale

Dato un punto P della superficie terrestre si considerino il parallelo ed il meridiano passanti per esso; indichiamo con P' l'intersezione tra il meridiano per P e l'equatore; l'angolo PCP', essendo C il centro della sfera, è definito LATITUDINE e varia da O° a 90° se P è nell'emisfero Nord, da -90° a O° se P è nell'emisfero Sud.

Indichiamo con O l'intersezione tra il parallelo per P ed il merdiano fondamentale e sia A l'intersezione tra il piano parallelo per P e l'asse di rotazione: l'angolo PAO è definito LONGITUDINE e varia da 0° a 180° a EST del meridiano fondamentale, da -180° a 0° a Ovest del meridiano fondamentale.

La LATITIDINE λ e la LONGITUDINE φ definiscono un sistema di coordinate geografiche terrestri.

Con la collaborazione di Angela Santamaria