ORDINAMENTO 2007 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

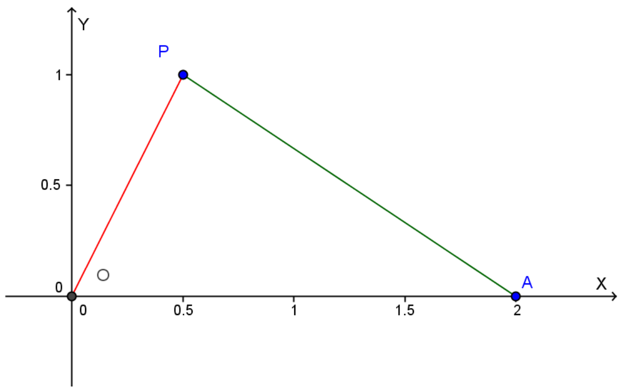
Rispetto ad un sistema di assi cartesiani (Oxy) si consideri il punto A(2,0).

1)

Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la relazione:

$$PO^2 + 2\,PA^2 = 8\ ,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.



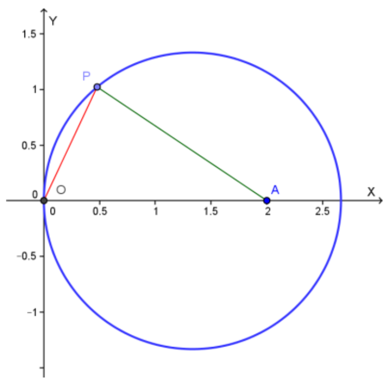
Posto P=(x;y), risulta:

$PO^2 = x^2 + y^2$, $PA^2 = (x-2)^2 + y^2$ quindi:

$PO^2 + 2\,PA^2 = x^2 + y^2 + 2[(x-2)^2 + y^2] = 8$. Il luogo ha quindi equazione:

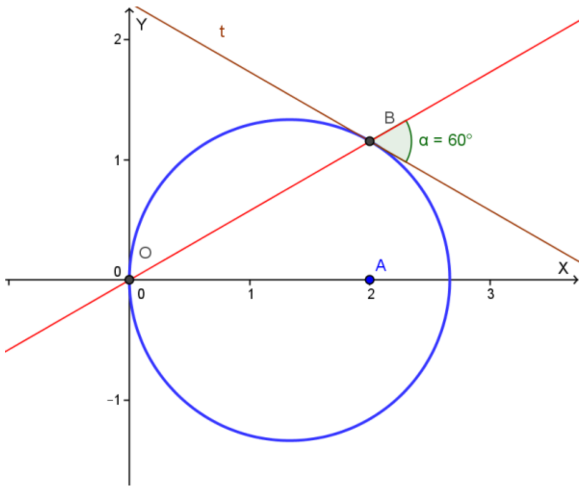
$$3x^2 + 3y^2 - 8x = 0$$

che è una circonferenza con centro $\left(\frac{4}{3};0\right)$ e raggio $R = \frac{4}{3}$.



2)

Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.



O=(0;0),   A=(2,0) ; troviamo l'ordinata di B (positiva) ponendo x=2 nell'equazione della circonferenza $3x^2 + 3y^2 - 8x = 0$:

$12 + 3y^2 - 16 = 0 \;\; da \; cui \;\; y = 2: \quad B = \left(2; \sqrt{4/3}\right)$

Cerchiamo il coefficiente angolare delle due rette.

$$m_{OB} = \frac{\sqrt{4/3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La tangente in B è perpendicolare alla retta che CB, essendo $C = \left(\frac{4}{3}; 0\right)$ il centro della circonferenza.

$$m_{CB} = \frac{\sqrt{4/3}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4/3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Quindi: $m_t = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

L'angolo acuto α formato dalle rette OB e t è quello per cui:

$$tg\alpha = \left|\frac{m_t - m_{OB}}{1 + m_t \cdot m_{OB}}\right| = \left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 60°$$

3)

Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.*

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Il passaggio per l'origine impone d=0.

$y = ax^3 + bx^2 + cx$

La presenza della tangente orizzontale in O impone $y'(0) = 0$, quindi:

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'(0) = 0 \quad \Longrightarrow c = 0$

$y = ax^3 + bx^2$

Essendoci in O un flesso deve essere $y''(0) = 0$, quindi:

$y'' = 6ax^2 + 2b$, $y''(0) = 0 \quad \Longrightarrow b = 0$

$y = ax^3$

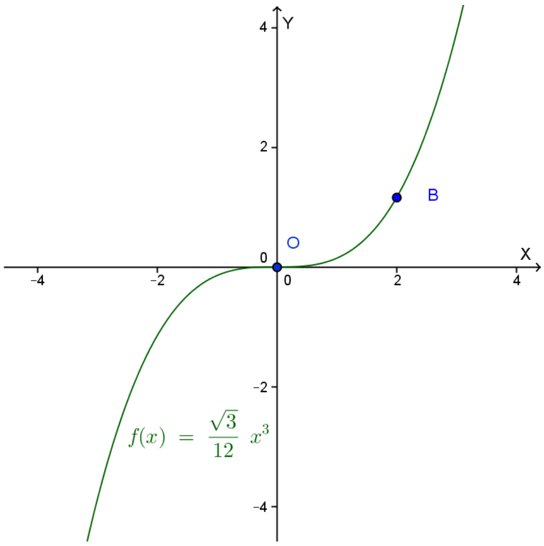
Imponendo il passaggio per $B = \left(2; \sqrt{4/3}\right)$ abbiamo: $\sqrt{\frac{4}{3}} = 8a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

La funzione ha quindi equazione:

$$\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{3}}{12} x^3}$$

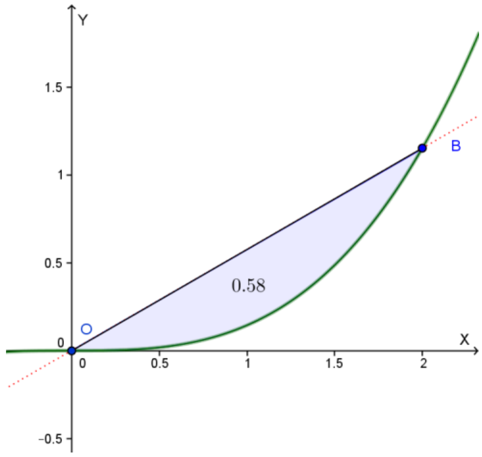
Si tratta di una funzione nota, definita per $-\infty < x < +\infty$, dispari, sempre crescente, con concavità verso l'alto se x>0 e verso il basso se x<0; nell'origine abbiamo un flesso a tangente orizzontale.

Il suo grafico è il seguente:



4)

Si *calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.*



Determiniamo l'equazione della retta OB, dove $O = (0;0)$ $\quad e \quad$ $B = \left(2; \sqrt{4/3}\right)$.

$$m = \frac{\sqrt{4/3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3\right]dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{48}x^4\right]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{48}\cdot 16 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \quad u^2 \quad \cong 0.58 \ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri