ORDINAMENTO 2007 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si calcoli il limite della funzione $\frac{x^2 cosx}{x^2 - sen^2 x}$ *, quando x tende a 0.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 cosx}{x^2 - sen^2 x} = \left[F.I.\ \frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 cosx}{x^2\left(1 - \frac{sen^2 x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{cosx}{1 - \frac{sen^2 x}{x^2}} = \infty$$

QUESITO 2

Si determini il campo di esistenza della funzione $y = arcsen(tgx)$, *con* $0 \le x \le 2\pi$.

Deve essere:

$$-1 \le tgx \le 1 \quad : \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \quad et \quad \frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi \quad et \quad \frac{7}{4}\pi \le x \le 2\pi$$

QUESITO 3

Si calcoli il valore medio della funzione $y = tg^2 x$, *nell'intervallo* $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Il valor medio f(c) è dato da:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx$$

Abbiamo:

$$\int tg^2 x dx = \int (1 + tg^2 x - 1)dx = \int (1 + tg^2 x)dx - \int dx = tgx - x + k$$

Quindi:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x dx = \frac{4}{\pi}[tgx - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{4-\pi}{\pi} \cong 0.273 = valor\ medio$$

QUESITO 4

Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$ *, nell'intervallo* $0 \le x \le 2$ *, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.*

La funzione (razionale intera) è continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange. Esiste quindi almeno un punto c, interno all'intervallo, cioè $0 < c < 2$, per cui:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Risulta:

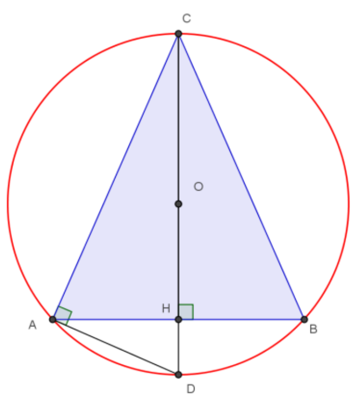
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0+8}{2} = 4 \quad ed \quad f'(x) = 3x^2\ , \quad quindi: \quad 3x^2 = 4,\ \ da\ cui \quad c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

L'unico valore interno all'intervallo è quello positivo, quindi:

$$c = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

QUESITO 5

Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.



Poniamo $CH = x \quad , con \quad 0 \leq x \leq 2r$.

Per il secondo teorema di Euclide risulta: $AH^2 = CH \cdot HD = x \cdot (2r - x)$, quindi:

$AB = 2AH = 2\sqrt{x \cdot (2r - x)}$

Indicando con y la somma dell'altezza e del doppio della base risulta:

$y = CH + 2AB = x + 4\sqrt{x \cdot (2r - x)}$

Dobbiamo cercare il massimo di y quando $0 \leq x \leq 2r$.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$y' = 1 + 4 \cdot \frac{2r - 2x}{2 \cdot \sqrt{x \cdot (2r - x)}} = 1 + 4 \cdot \frac{r - x}{\sqrt{x \cdot (2r - x)}} = 0 \quad se:$$

$\sqrt{x \cdot (2r - x)} = 4(x - r)$; in cui deve essere x>r.

Elevando al quadrato ambo i membri si ha:

$$x \cdot (2r - x) = 16(x^2 - 2rx + r^2) \quad \Longrightarrow \quad 17x^2 - 34rx + 16r^2 = 0 \quad da\ cui:$$

$$x = \frac{4\sqrt{17}|r|}{17} + r = \frac{17r \pm 4r\sqrt{17}}{17} = r \cdot \left(\frac{17 \pm 4\sqrt{17}}{17}\right) \quad quindi:$$

$$x_1 = r \cdot \left(\frac{17 - \sqrt{17}}{17}\right) \cong 0.76\, r : non\ accettabile\ perch\grave{e}\ minore\ di\ r$$
$$x_2 = r \cdot \left(\frac{17 + \sqrt{17}}{17}\right) \cong 1.24\, r : accettabile\ \ perch\grave{e}\ maggiore\ di\ r\ e\ minore\ di\ 2r$$

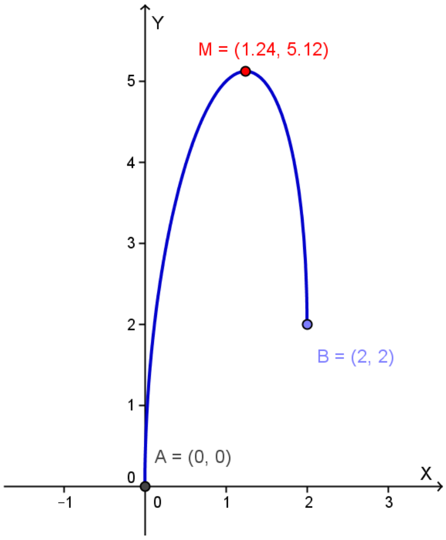
Siccome la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto, da ricercarsi tra i valori agli estremi dell'intervallo, tra i punti che annullano la derivata prima e tra gli eventuali punti di non derivabilità (nel nostro caso x=0 e x=2r).

$f(0) = 0, \quad f(2r) = 2r, \quad f(x_2) \cong f(1.24\, r) \cong \quad 5.12\, r$

Quindi il massimo si ha per $x = r \cdot \left(\frac{17+\sqrt{17}}{17}\right)$ e vale circa $5.12\, r$.

Ponendo l'unità di misura uguale ad r, la funzione da ottimizzare ha equazione:

$y = x + 4\sqrt{x \cdot (2 - x)}$, con $0 \leq x \leq 2$, il cui grafico è il seguente:



QUESITO 6

Si consideri la seguente proposizione: "Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta". Si dica se è vera e si motivi esaurientemente la risposta.

La proposizione è falsa.

Il luogo richiesto è un piano, ed esattamente il piano perpendicolare al segmento che congiunge i due punti e passante per il punto medio del segmento stesso.

Siano A e B due punti distinti dello spazio: $A = (x_1, y_1, z_1)$ e B= (x_2, y_2, z_2)
Detto $P = (x, y, z)$ il generico punto dello spazio, il luogo richiesto è dato da:

$PA = PB \quad da\ cui \quad PA^2 = PB^2 \quad quindi$:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2$$

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2$$

Questo piano (come si vede dai parametri direttori) è perpendicolare alla retta AB e, come si può verificare, passa per il punto medio M di AB che ha coordinate:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

QUESITO 7

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x\, arctg\,\frac{1}{x} & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

Per essere continua deve essere:

$$\lim_{x \to 0} x\, arctg\,\frac{1}{x} = 0$$

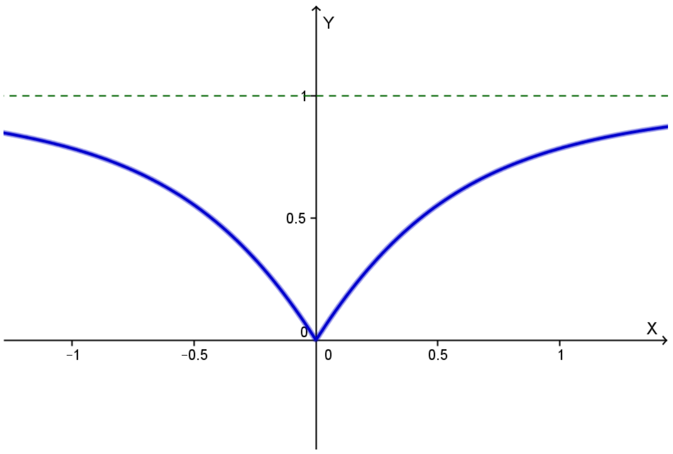
Tale limite è effettivamente 0, poiché la funzione $arctgx$, se $x \to \pm\infty$, tende a $\pm\frac{\pi}{2}$.

Stabiliamo se la funzione è derivabile in x=0 applicando la definizione di derivata:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot arctg\,\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} arctg\,\frac{1}{h}$$

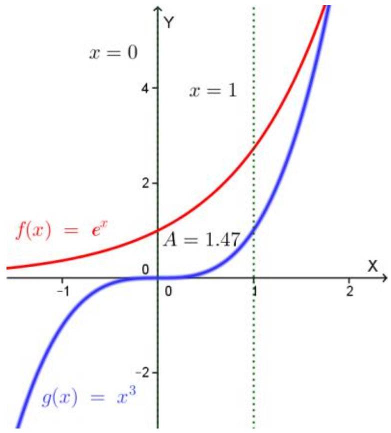
Se $h \to 0^+$ il limite è $\frac{\pi}{2}$, se $h \to 0^-$ il limite è $-\frac{\pi}{2}$: in x=0 la funzione non è quindi derivabile; in particolare si ha un punto angoloso, poiché la derivata destra e sinistra esistono, finite, ma sono diverse.

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 8

Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione $y = e^x$ *, dalla curva di equazione* $y = x^3$ *e dalle rette* $x = 0$ *e* $x = 1$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^1 (e^x - x^3)dx = \left[e^x - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = e - \frac{1}{4} - (1) = e - \frac{5}{4} \cong 1.47$$

QUESITO 9

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \frac{2x^2+3}{x+2}$.

La funzione (razionale fratta) è definita per $x \neq -2$ ed il numeratore non si annulla per $x = -2$; poiché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, avremo un asintoto verticale ed uno obliquo.

$\lim_{x\to -2} f(x) = \infty \quad : \quad x = -2$ *asintoto verticale*.

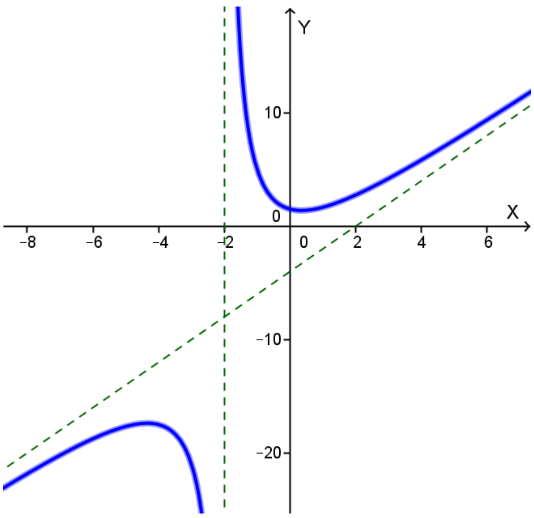
Determiniamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{x+2} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3-4x}{x+2}\right) = -4 = q$$

Quindi l'asintoto obliquo ha equazione: $y = 2x - 4$.

Il grafico della funzione è il seguente:



QUESITO 10

Si risolva la disequazione

$$\binom{x}{3} > \frac{15}{2}\binom{x}{2} .$$

La presenza dei coefficienti binomiali impone le seguenti condizioni:
$x \geq 3 \quad e \quad x \geq 2, \quad quindi\colon \; x \geq 3$ e intero.

Sviluppando otteniamo:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{6} > \frac{15}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{2} \quad , \quad 2x(x-1)(x-2) > 45x(x-1) \quad da\ cui:$$

$x(x-1)(2x-4-45) > 0$, $\quad x(x-1)(2x-49) > 0$, da cui, tenendo presente che $x \geq 3$

e quindi x e x-1 sono positivi: $\; 2x - 49 > 0$

Quindi la disequazione ammette come soluzione $x > \frac{49}{2}$, $con\ x\ intero\colon x = 25, 26, 27, \ldots$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri