PNI 2007 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt$$

1)

Si studi la funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy).

Calcoliamo l'integrale che definisce la funzione.

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t} + e^{2t} - 3e^t\right]_0^x = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x - (\frac{1}{3} + 1 - 3)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(e^x + 5)(e^x - 1)^2$$

La seconda espressione della funzione si ottiene scomponendo il polinomio
$\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$
$x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ si abbassa di grado mediante la regola di Ruffini notando che si annulla per x=1.

Dominio: $-\infty \leq x \leq +\infty$

Simmetrie notevoli: f(-x) è diversa sia da f(x) sia da –f(x) quindi la funzione non èpari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:
x=0, y=0
y=0, $e^x - 1 = 0, da\ cui\ x = 0$

Segno della funzione: $f(x) \geq 0$ in tutto il dominio
Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \quad : \quad y = \frac{5}{3} \quad asintoto\ orizzontale\ per\ x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}\right) = +\infty$$

Non c'è asintoto obliquo, poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

Derivata prima:

Vista la definizione della funzione come funzione integrale, risulta:

$f'(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^{x} = e^{x}(e^{2x} + 2e^{x} - 3) = e^{x}(e^{x} + 3)(e^{x} - 1)$

$f'(x) \geq 0 \quad se \quad e^{x} - 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0$

Quindi la funzione è crescente se x>1 e decrescente se x<1: x=1 è punto di minimo (relativo e assoluto) , con $f(1) = 0$

Derivata seconda:

$f''(x) = 3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^{x} = e^{x}(3e^{2x} + 4e^{x} - 3)$

$f''(x) \geq 0 \quad se \quad 3e^{2x} + 4e^{x} - 3 \geq 0$

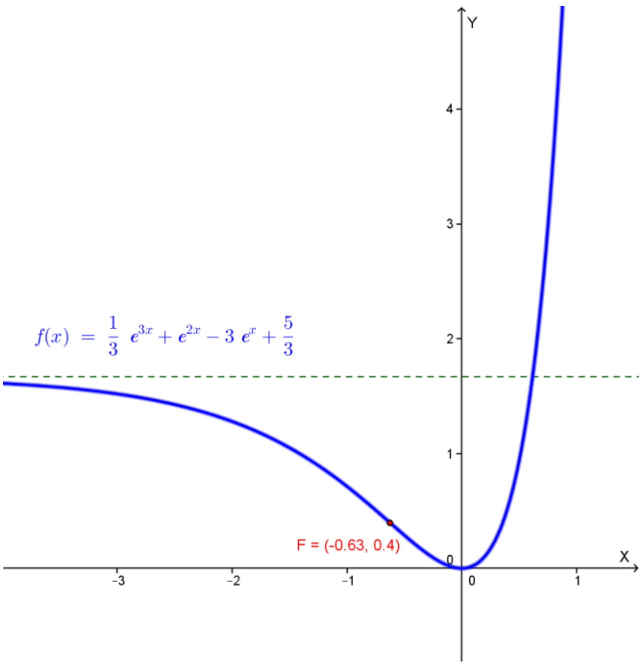
Risulta $\quad 3e^{2x} + 4e^{x} - 3 = 0 \quad se \quad e^{x} = \frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ quindi:

$3e^{2x} + 4e^{x} - 3 \geq 0$ se $e^{x} \leq \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$ (mai) oppure $e^{x} \geq \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \cong 0.54$

Quindi $f''(x) \geq 0$ se $x \geq ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right) \cong -0.63$

Quindi il grafico ha la concavità verso l'alto se $x > ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$ e verso il basso se $x < ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$; ha un flesso se $x = ln\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$, di ordinata $y \cong 0.4$

Il grafico della funzione è pertanto il seguente:



2)

Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa $log2$.

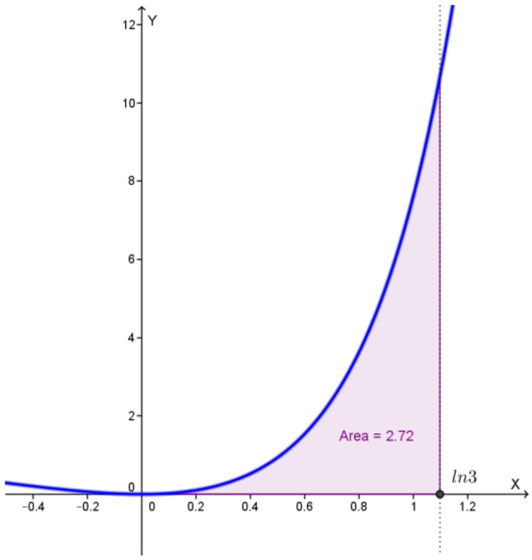
Se $x = ln2$, $y = f(ln2) = \frac{7}{3}$, $f'(ln2) = 10$

La normale a C nel punto di coordinate $\left(ln2; \frac{7}{3}\right)$ ha coefficiente angolare $-\frac{1}{10}$, la sua equazione è quindi:

$$y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{10}(x - ln2) \quad da\ cui \quad y = -\frac{1}{10}x + \frac{7}{3} + \frac{ln2}{10}$$

3)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = log3$.



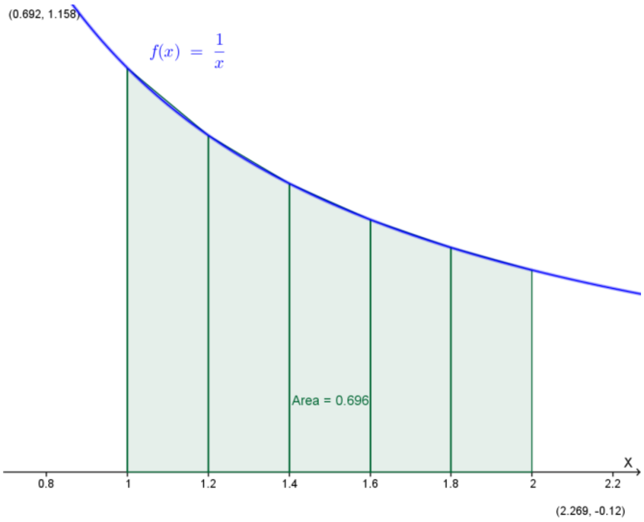
L'area richiesta è data da:

$$Area = \int_0^{ln3} f(x)dx = \int_0^{ln3} \left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}\right)dx = \left[\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}x\right]_0^{ln3} =$$

$$= 3 + \frac{9}{2} - 9 + \frac{5}{3}ln3 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2} - 3\right) = \left(\frac{8}{9} + \frac{5}{3}ln3\right) u^2 \cong 2.72\ u^2$$

4)

Tenuto conto che: $log2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$
si calcoli un valore approssimato di $log2$*, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.*

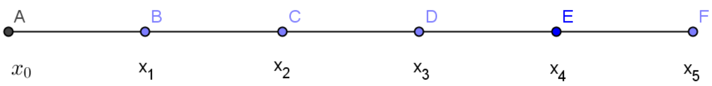


Posto $f(x) = \frac{1}{x}$, consideriamo l'intervallo $[1; 2]$ e dividiamolo in n parti; poniamo $h = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$.

Utilizzando, per esempio, la formula dei trapezi, l'integrale dato può essere approssimato mediante la formula:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

Nel nostro caso, ponendo per esempio n=5, abbiamo $h = \frac{1}{5} = 0.2$



$x_0 = 1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 1.6$, $x_4 = 1.8$, $x_5 = 2$

Quindi si ha la seguente approssimazione:

$$ln2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \cong 0.2 \cdot \left[\frac{f(1)+f(2)}{2} + f(1.2) + f(1.4) + f(1.6) + f(1.8)\right] \cong 0.696$$

(il valore esatto di ln2 è 0.693…)

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri