

## PNI 2007 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

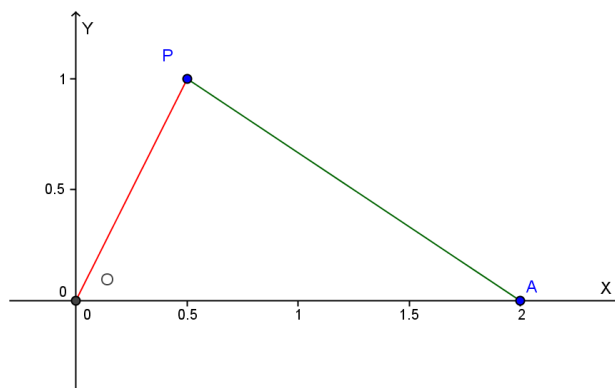
Rispetto ad un sistema di assi cartesiani (Oxy) si consideri il punto  $A(2,0)$ .

1)

Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la relazione:

$$PO^2 + 2PA^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.



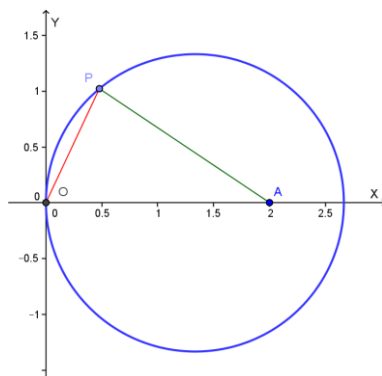
Posto  $P=(x;y)$ , risulta:

$$PO^2 = x^2 + y^2, \quad PA^2 = (x - 2)^2 + y^2 \quad \text{quindi:}$$

$$PO^2 + 2PA^2 = x^2 + y^2 + 2[(x - 2)^2 + y^2] = 8. \quad \text{Il luogo ha quindi equazione:}$$

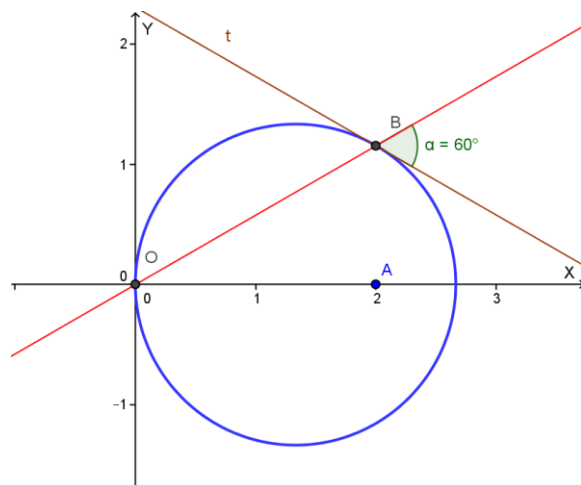
$$3x^2 + 3y^2 - 8x = 0$$

che è una circonferenza con centro  $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$  e raggio  $R = \frac{4}{3}$ .



2)

Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta  $OB$  con la tangente alla circonferenza in  $B$ , essendo  $B$  il punto della curva avente la stessa ascissa di  $A$  e ordinata positiva.



$O=(0;0)$ ,  $A=(2,0)$ ; troviamo l'ordinata di  $B$  (positiva) ponendo  $x=2$  nell'equazione della circonferenza  $3x^2 + 3y^2 - 8x = 0$ :

$$12 + 3y^2 - 16 = 0 \text{ da cui } y = 2: \quad B = (2; \sqrt{4/3})$$

Cerchiamo il coefficiente angolare delle due rette.

$$m_{OB} = \frac{\sqrt{4/3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La tangente in  $B$  è perpendicolare alla retta che  $CB$ , essendo  $C = (\frac{4}{3}; 0)$  il centro della circonferenza.

$$m_{CB} = \frac{\sqrt{4/3}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4/3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Quindi: } m_t = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'angolo acuto  $\alpha$  formato dalle rette  $OB$  e  $t$  è quello per cui:

$$tg\alpha = \left| \frac{m_t - m_{OB}}{1 + m_t \cdot m_{OB}} \right| = \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

**3)**

Si scriva l'equazione della parabola cubica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Il passaggio per l'origine impone  $d=0$ .

$$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

La presenza della tangente orizzontale in O impone  $y'(0) = 0$ , quindi:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$y = ax^3 + bx^2$$

Essendoci in O un flesso deve essere  $y''(0) = 0$ , quindi:

$$y'' = 6ax + 2b, \quad y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$y = ax^3$$

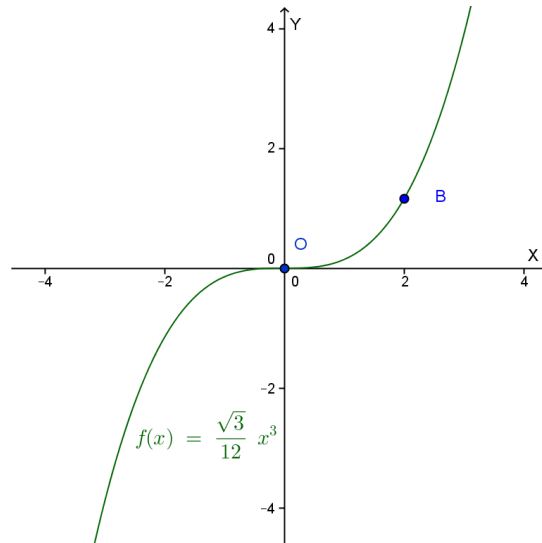
Imponendo il passaggio per  $B = (2; \sqrt{4/3})$  abbiamo:  $\sqrt{\frac{4}{3}} = 8a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$

La funzione ha quindi equazione:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{12} x^3$$

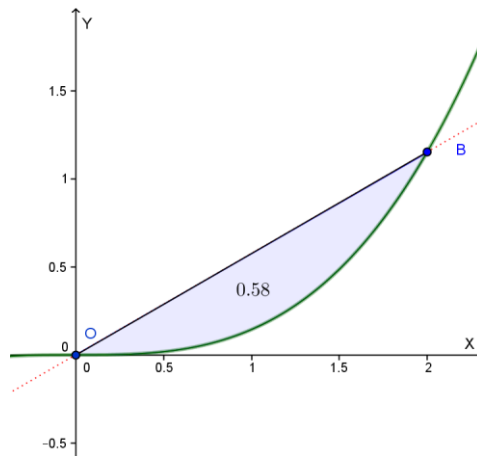
Si tratta di una funzione nota, definita per  $-\infty < x < +\infty$ , dispari, sempre crescente, con concavità verso l'alto se  $x > 0$  e verso il basso se  $x < 0$ ; nell'origine abbiamo un flesso a tangente orizzontale.

Il suo grafico è il seguente:



**4)**

Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.



Determiniamo l'equazione della retta OB, dove  $O = (0; 0)$  e  $B = (2; \sqrt{4/3})$ .

$$m = \frac{\sqrt{4/3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{12}x^3 \right] dx = \left[ \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{48}x^4 \right]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{48} \cdot 16 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} u^2 \cong 0.58 u^2 = \text{Area} \end{aligned}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri