PNI 2007 - SESSIONE SUPPLETIVA

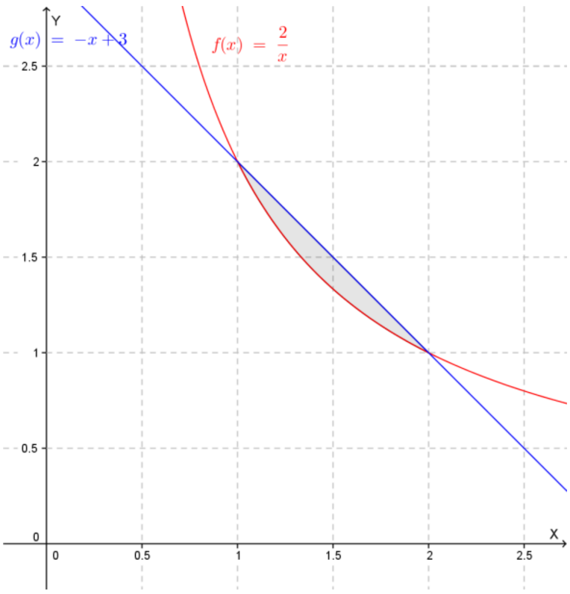
QUESITO 1

Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse x della regione finita di piano delimitata dalla curva y=2/x e dalla retta di equazione y = -x+3 .

Poniamo $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad e \quad$ $g(x) = -x + 3$ e determiniamo i punti di intersezione dei due grafici.

$$\frac{2}{x} = -x + 3 \quad da\ cui \quad x^2 - 3x + 2 = 0: \quad x = 1 \quad e\ \ x = 2$$

Rappresentiamo le due curve nello stesso piano cartesiano, evidenziando la regione delimitata dalle due curve:



Il volume del solido richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \pi \int_1^2 [g^2(x) - f^2(x)]dx = \pi \int_1^2 \left[(-x+3)^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left[x^2 - 6x + 9 - \frac{4}{x^2}\right] dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + \frac{4}{x}\right]_1^2 =$$

$$= \pi \left[\frac{8}{3} - 12 + 18 + 2 - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 + 4\right)\right] = \frac{\pi}{3}\ u^3 \cong 1.047\ u^3 = V$$

QUESITO 2

Si calcoli il valore medio della funzione $y = sen^3 x$, *nell'intervallo* $0 \leq x \leq \pi$.

Il valor medio f(c) è dato da:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen^3 x\, dx$$

Abbiamo:

$$\int sen^3 x\, dx = \int senx(sen^2 x)dx = \int senx(1-\cos^2 x)dx = \int senx\, dx - \int senx(\cos^2 x)dx$$

$$= -cosx + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$$

Quindi:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen^3 x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-cosx + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3\pi} \cong 0.424 = f(c)$$

QUESITO 3

Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, *nell'intervallo chiuso [1;2], si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.*

La funzione (razionale intera) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1;2] ed è derivabile nell'intervallo aperto (1;2); dobbiamo stabilire quando f(1)=f(2).

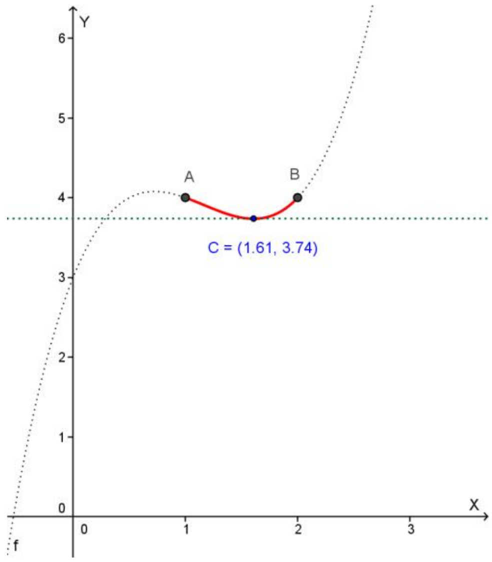
$$f(1) = 4\,, \quad f(2) = 11 + 2k \quad quindi\ deve\ essere\colon\ 4 = 11 + 2k \quad da\ cui\colon\ k = -\frac{7}{2}$$

Quindi la funzione soddisfa il teorema di Rolle se $k = -\frac{7}{2}$; la funzione diventa:

$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$; il teorema di Rolle garantisce l'esistenza di almeno un punto interno all'intervallo dato in cui si annulla la derivata prima.

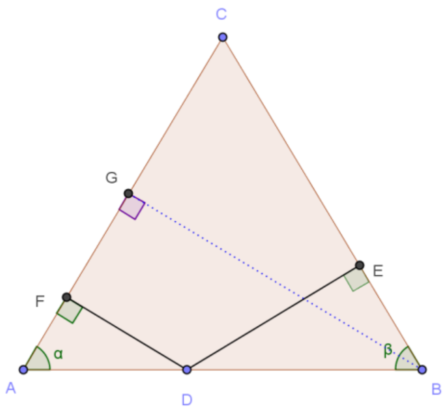
$f'(x) = 3x^2 - 7x + \frac{7}{2} = 0 \quad se \quad 6x^2 - 14x + 7 = 0$ da cui:

$x_1 = \frac{7-\sqrt{7}}{6} \cong 0.73 : non\ accettabile$ e $x_1 = \frac{7+\sqrt{7}}{6} \cong 1.61 :\ accettabile$



QUESITO 4

Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.



Risulta:

$DF = ADsen\alpha\,, \qquad DE = DBsen\beta = DBsen\alpha$

$DF + DE = ADsen\alpha + DBsen\alpha = (AD + DB)sen\alpha = AB \cdot sen\alpha = BG = costante$

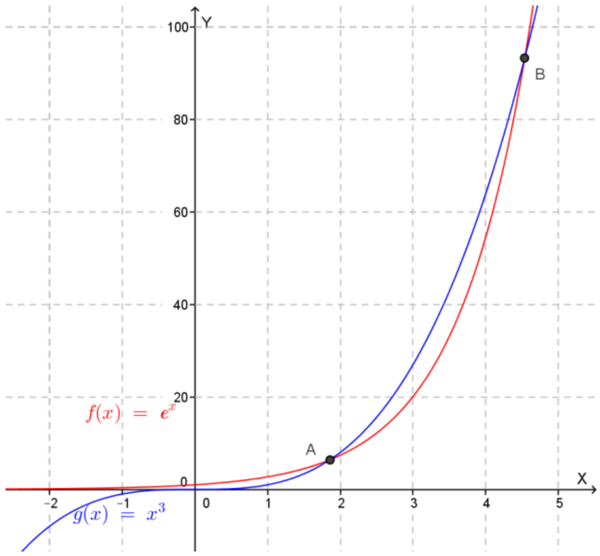
Quindi la somma delle distanze da un punto della base dai lati uguali è uguale all'altezza relativa ad uno dei lati uguali, quindi è costante:

la proposizione è vera.

QUESITO 5

Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ *ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.*

Poniamo $f(x) = e^x \quad e \quad g(x) = x^3$; i grafici delle due funzioni si intersecano in DUE punti, quindi la soluzione NON E' UNICA (potrebbe esserci un errore di segno nel testo, infatti l'equazione $e^x + x^3 = 0$ avrebbe un'unica soluzione, negativa).
Le due soluzioni, come si vede dal grafico seguente, sono comprese la prima tra 1 e 2 e l'altra tra 4 a e 5.



Calcoliamo la soluzione tra 1 e 2.

Poiché $e^1 - 1^3 = e - 1 > 0 \quad e \quad e^2 - 8 \cong -0.6 < 0$, c'è una soluzione **c** è compresa tra 1 e 2.

Vogliamo calcolare un valore approssimato di **c** con due cifre decimali esatte.

Applichiamo il **metodo delle tangenti**.

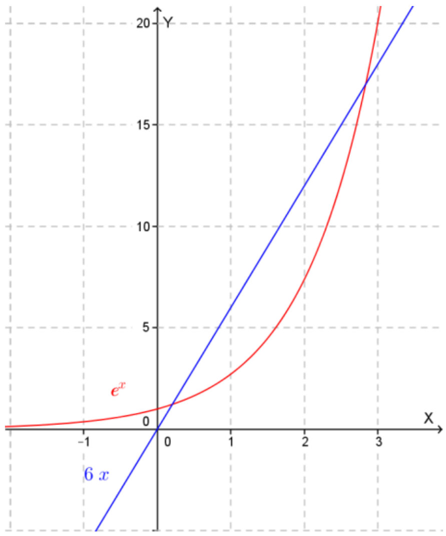
$h(x) = e^x - x^3$ intervallo [1;2] $h(1) = e - 1 > 0 \quad e \quad h(2) = e - 8 < 0$

$h'(x) = e^x - 3x^2$

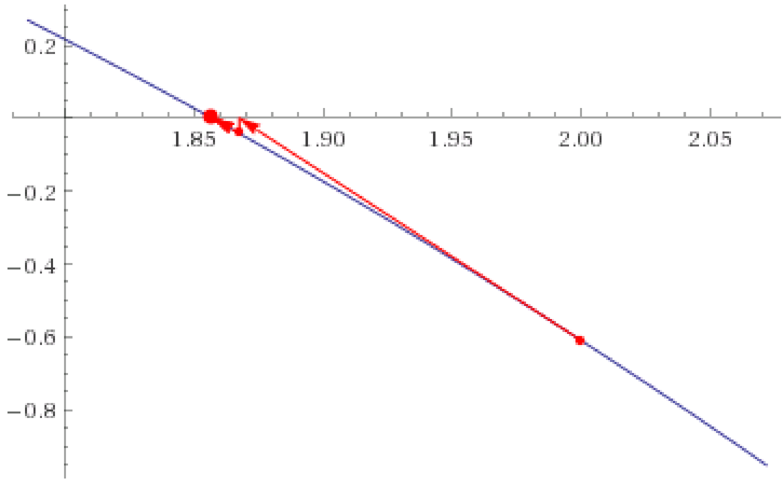
$h''(x) = e^x - 6x$

$h''(x) = e^x - 6x > 0 \quad se \quad e^x > 6x$: mai verificato nell'intervallo [1;2], come si può notare

dal grafico seguente:



Quindi nell'intervallo [a;b]=[1;2] la derivata seconda è sempre negativa. Inoltre, essendo $h(1) = e - 1 > 0$ risulta: $h''(x) \cdot h(1) < 0$, pertanto il punto iniziale dell'iterazione è $x_0 = b = 2$.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 2 - \frac{h(2)}{h'(2)} = 2 - \frac{-0.611}{-4.611} \cong 1.8675$$

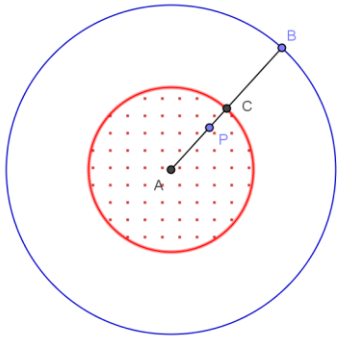
$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = 1.8675 - \frac{h(1.8675)}{h'(1.8675)} \cong 1.8572$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} = 1.8572 - \frac{h(1.8572)}{h'^{(1.8572)}} \cong 1.8572$$

Quindi la radice approssimata con due cifre decimali esatte (per difetto) è *c=1.85 .*
Il valore esatto di c è 1.857183…

QUESITO 6

Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.



Detto r il raggio del cerchio, il punto P è più vicino al centro che alla circonferenza se appartiene al cerchio concentrico a quello dato con raggio r/2. Quindi:

$$p = \frac{Area\ favorevole}{Area\ possibile} = \frac{\pi \cdot \frac{r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\ \%$$

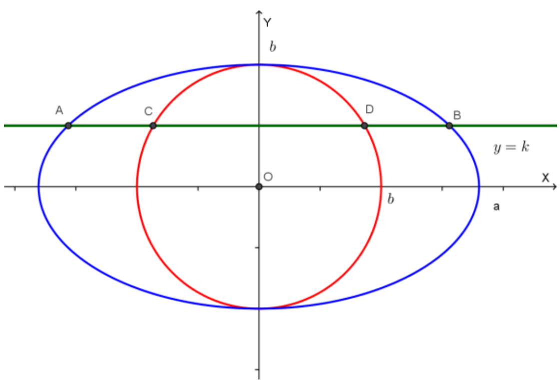
QUESITO 7

Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è $S = \pi ab$.

Il principio di Cavalieri nel piano possiamo enunciarlo nel modo seguente:

"Se un fascio di rette parallele stacca su due figure piane corde uguali (o proporzionali) allora anche le aree delle due figure sono uguali (o proporzionali, con lo stesso rapporto di proporzionalità delle corde)"

Rappresentiamo l'ellisse di semiassi a e b e la circonferenza di raggio b nello stesso piano cartesiano in modo che abbiamo lo stesso centro e sechiamo le due figure con una generica corda parallela all'asse delle x, di equazione quindi y=k. Indichiamo con AB e CD le corde staccate rispettivamente sull'ellisse e sulla circonferenza.



L'ellisse ha equazione: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e la circonferenza: $x^2+y^2=b^2$
Cerchiamo la lunghezza della corda staccata sull'ellisse:

$$\begin{cases} y=k \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=k \\ x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \end{cases}$$ quindi: $AB=x_B-x_A=\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

Cerchiamo la lunghezza della corda staccata sulla circonferenza:

$$\begin{cases} y=k \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=k \\ x=\pm\sqrt{b^2-y^2} \end{cases}$$ quindi: $CD=x_D-x_C=2\sqrt{b^2-y^2}$

Il rapporto tra le due corde è: $\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}$.

Quindi:

$$\frac{Area(ellisse)}{Are(cerchio)}=\frac{a}{b} \quad da\ cui \quad Area(ellisse)=\frac{a}{b}\cdot Area(cerchio)=\frac{a}{b}\cdot(\pi b^2)=\pi ab$$

QUESITO 8

Si calcoli il limite della funzione $\frac{x-senx}{x(1-cosx)}$, *quando x tende a 0.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x(1-cosx)}=\left[F.I.\ \ \frac{0}{0}\right]$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{2}}=\frac{1}{3}$$

Allo stesso risultato si può arrivare applicando la regola di de L'Hôpital.

QUESITO 9

Si verifichi che la curva di equazione $y=x^3+3x^2-1$ *è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.*

La proprietà è valida per ogni cubica, che sempre uno ed un solo punto di flesso, ottenuto annullando la derivata seconda:

$$y=f(x)=x^3+3x^2-1,\quad f'(x)=3x^2+6x\,,\quad f''(x)=6x+6=0\quad se\ x=-1\ ;\ f(-1)=1$$

Quindi il punto di flesso ha coordinate: $F=(-1;1)$.

Le equazioni della simmetria rispetto al punto di coordinate (a;b) sono:

$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ *da cui* $\begin{cases} x = 2a - x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$ *nel nostro caso* $\begin{cases} x = -2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$

La simmetrica della curva data rispetto al punto di flesso ha quindi equazione:

$2 - y' = (-2 - x')^3 + 3(-2 - x')^2 - 1$ ... ... $y' = (x')^3 + 3(x')^2 - 1$

che coincide con la curva di partenza.

QUESITO 10

Si risolva la disequazione

$$5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3} .$$

La presenza dei coefficienti binomiali impone le seguenti condizioni:
$x \geq 3 \quad e \quad x + 2 \geq 2 \;\; cioè \; x \geq 0, \quad quindi: \;\; x \geq 3$ e intero.

Sviluppando otteniamo:

$5 \cdot \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} \leq \dfrac{(x+2)(x+1)x}{6}$, $\quad 5x(x-1)(x-2) > (x+2)(x+1)x \quad da\ cui$:

$2x(x-4)(2x-1) > 0$ da cui, tenendo presente che $x \geq 3$ e quindi x e 2x-1 sono positivi:

$x - 4 \leq 0 \quad da\ cui \quad x \leq 4$. Siccome $x \geq 3$ e intero, le uniche soluzioni sono $x = 3, \; x = 4$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri