ORDINAMENTO 2007 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $f(x) = ln\sqrt{x^2 - 4}$.

1)

Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

Dominio:

$x^2 - 4 > 0, \quad -\infty < x < -2 \ \ vel \ \ 2 < x < +\infty$

Essendo f(-x)=f(x) la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y).

Intersezioni con gli assi:

x=0 non ha senso
y=0: $\sqrt{x^2 - 4} = 1$, $x = \pm\sqrt{5}$.

Segno ella funzione:

$f(x) > 0 \ \ se \ \ ln\sqrt{x^2 - 4} > 0$, $\quad \sqrt{x^2 - 4} > 1, \ \ x^2 > 5\text{:} \ \ x < -\sqrt{5} \ \ vel \ \ x > \sqrt{5}$

Limiti:

$\lim_{x \to 2^+} ln\sqrt{x^2 - 4} = -\infty = \lim_{x \to (-2)^-} ln\sqrt{x^2 - 4}\text{:} \quad x = \pm 2 \ \ asintoti \ verticale$

$\lim_{x \to \pm\infty} ln\sqrt{x^2 - 4} = +\infty$;

non esistono asintoti obliqui poiché la funzione non è un infinito del primo ordine.

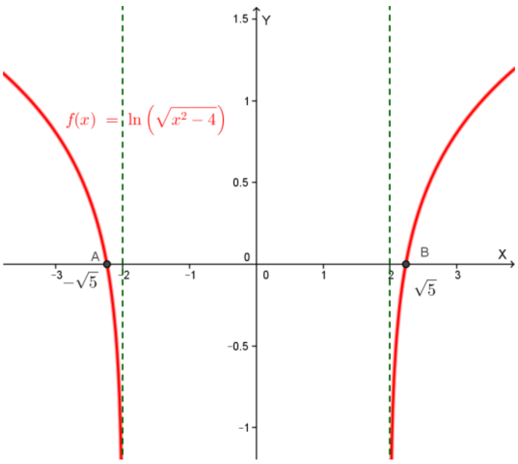
Derivata prima:

$f'(x) = D\left(\frac{1}{2}\ln|x^2 - 4|\right) = \frac{x}{x^2 - 4} \geq 0 \ \ se \ x > 0$, il denominatore è sempre positivo nel dominio della funzione. La funzione è quindi crescente se x>2 e decrescente se x<-2

Derivata seconda:

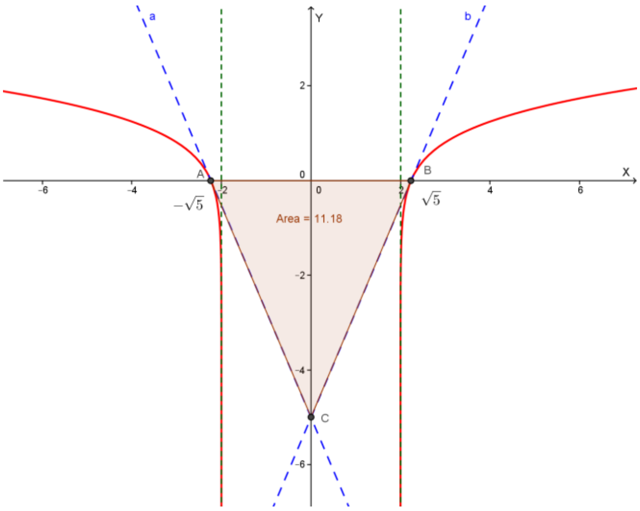
$f''(x) = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} < 0$ in tutto il dominio: concavità sempre verso il basso, nessun flesso.

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Si scrivano le equazioni delle tangenti a C nei punti in cui essa incontra l'asse x e si calcoli l'area del triangolo formato dalle suddette tangenti e dall'asse x medesimo.



La curva C incontra l'asse delle x nei punti $A = \left(-\sqrt{5}; 0\right)$ e $B = \left(\sqrt{5}; 0\right)$.

Risulta: $f'\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$, quindi:
tangente in A: $y = \sqrt{5}\left(x - \sqrt{5}\right)$, $y = \sqrt{5}x - 5$
data la simmetria della curva la tangente in B è simmetrica rispetto all'asse y della tangente in A, quindi si ottiene da essa scambiando x in –x:
tangente in B: $y = -\sqrt{5}x - 5$

Il triangolo ha area: $A(ABC) = \frac{AB \cdot CO}{2} = 5\sqrt{5}u^2 \;\cong 11.18\, u^2$

3)

Si studi la funzione derivata f '(x) e se ne tracci il grafico C'.

Il grafico della derivata di una funzione può essere dedotto da quello della funzione stessa.

Dominio:

La funzione $f(x) = ln\sqrt{x^2-4}$, come visto nel suo studio, è continua e derivabile nel suo dominio, quindi il dominio di $f'(x)$ coincide con quello di $f(x)$: $x < -2 \;\; vel \;\; x > 2$.

Siccome $f(x)$ (sempre derivabile) non ammette massimi e minimi, la sua derivata non si annulla mai.

Osserviamo che, essendo la funzione f(x) pari, la sua derivata è dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Segno della funzione $f'(x)$:

La $f(x)$ è crescente per x>2, quindi in tale intervallo la derivata è positiva; invece per x<-2 la $f(x)$ è decrescente, quindi la derivata è negativa.

Studio della monotonia di $f'(x)$:

La derivata di $f'(x)$ è $f''(x)$, che è sempre negativa, quindi la $f'(x)$ è sempre decrescente.

Limiti:

Osservando il grafico della $f(x)$ e l'andamento della sua generica tangente (il cui coefficiente angolare è appunto $f'(x)$), possiamo dire che:

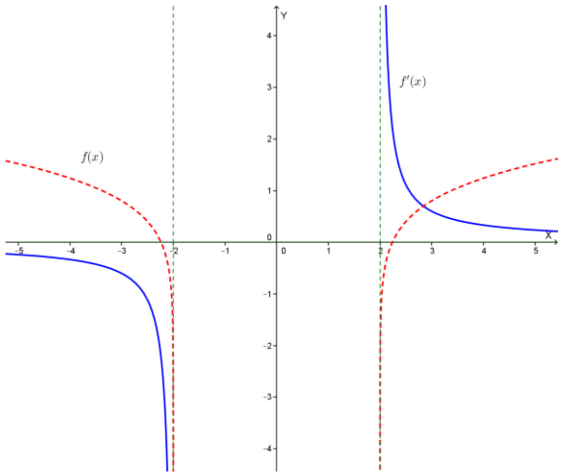
$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty \;\; x = 2 \;\; asintoto\ verticale$

$\lim_{x\to(-2)^-} f'(x) = -\infty : \quad x = -2 \;\; asintoti\ verticale$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0^+$: y=0 asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0^-$: y=0 asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

Il grafico di $y = f'(x)$ è quindi il seguente (in tratteggio il grafico della f(x)):



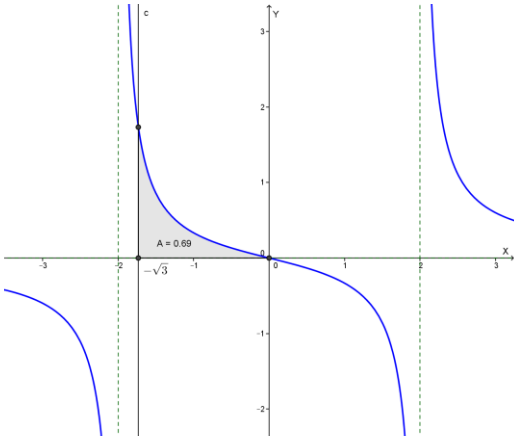
4)

Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C', dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -\sqrt{3}$.

La curva C' NON ESISTE per $x = -\sqrt{3}$, quindi il quesito non ha senso. Probabilmente l'estensore intendeva la derivata della funzione a prescindere dal dominio della f(x).
Risolviamo il quesito secondo questa interpretazione (comunque non corretta):

$$y = f'(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Rappresentiamo la superficie richiesta, completando il grafico della f' (x):



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{x}{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{2x}{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2 - 4|]_{-\sqrt{3}}^{0} = \frac{1}{2}[ln4 - ln1] = ln2\, u^2$$

$$= (ln2)\, u^2 \cong 0.69\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria