ORDINAMENTO 2007 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Si determini il campo di esistenza della funzione $y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{|x-4|}}$.

Ricordiamo che il campo di esistenza di una funzione del tipo $y = f(x)^{g(x)}$ è dato da:

$$f(x) > 0 \quad \cup \quad \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso:

$$\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ \frac{1}{|x-4|} > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \ \ vel \ \ x > 3 \\ x \neq 4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x = 0, x = 3 \\ \frac{1}{|x-4|} > 0 \end{cases} \ accettabile$$

Quindi il campo di esistenza è dato da: $(x \leq 0 \ \ vel \ \ x \geq 3) \ con \ \ x \neq 4$.

QUESITO 2

Si calcoli il limite della funzione $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1}$ *quando x tende a 1.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0; moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} + 3$ e per $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} - 1$:

$$\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+3)(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1)}{(\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+1)(\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+3)(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1)} =$$

$$= \frac{\left(x-\left(\sqrt{x+3}-3\right)^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)}{\left(x-\left(\sqrt{x+3}-1\right)^2\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+3}+3\right)} = \frac{\left(-12+6\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)}{\left(-4+2\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)} =$$

$$= \frac{3\left(-4+2\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)}{\left(-4+2\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)} = \frac{3\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-1\right)} \rightarrow 3 \ \ se \ \ x \rightarrow 1$$

QUESITO 3

Si calcoli, in base alla definizione di derivata, la derivata della funzione $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ *nel punto x = -1.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

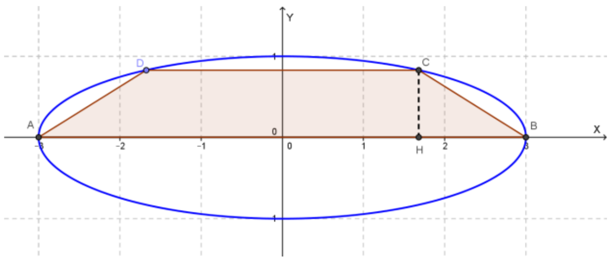
Nel nostro caso:

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-(-1+h)^2}{1+(-1+h)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-h^2}{h(2+2h+h^2)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2-h)}{h(2+2h+h^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{(2-h)}{(2+2h+h^2)} = 1 = f'(-1).$$

QUESITO 4

In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si consideri l'ellisse γ *d'equazione* $x^2+9y^2=9$ *e di asse maggiore AB. Fra i trapezi isosceli contenuti nel semipiano* $y \geq 0$ *inscritti in* γ *e di cui una base è AB, si determini quello di area massima.*



Indichiamo con C il vertice del trapezio appartenente al primo quadrante e poniamo $C=(x;y), con\ x^2+9y^2=9 \quad e\ \ y\geq 0$. Gli altri vertici hanno coordinate $A=(-3;0)$, $B=(3;0), D=(-x;y)$.

L'area del trapezio è:

$Area = \frac{(6+2x)y}{2} = (3+x)y$ che è massima se lo è $z=(3+x)^2y^2$
Ma risulta:
$y^2=\frac{9-x^2}{9}$, quindi: $z=(3+x)^2\frac{9-x^2}{9}=\frac{1}{9}(3+x)^3(3-x)$

Il massimo di z si può trovare facilmente con il metodo delle derivate; vogliamo proporre una soluzione elementare.

La funzione z è massima se lo è $(3+x)^3(3-x)$ che è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante : $(3+x)+(3-x)=6$. Per una nota proprietà il massimo si ha quando le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{3+x}{3}=\frac{3-x}{1}\,,\quad 3+x=9-3x,\quad x=\frac{3}{2}$$

Il massimo dell'area si ha quando l'ascissa di C è $\frac{3}{2}$ e quindi la sua ordinata è data da:

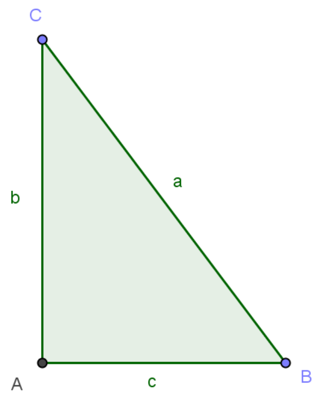
$$\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}=\sqrt{\frac{9-\frac{9}{4}}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

I vertici C e D del trapezio che realizza l'area massima sono quindi:

$C=\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), D=\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

QUESITO 5

Si consideri la seguente proposizione: "Dato un triangolo rettangolo, il cerchio che ha per raggio l'ipotenusa è la somma dei cerchi che hanno per raggio i cateti". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.



Detta a la misura dell'ipotenusa, il cerchio che ha per raggio l'ipotenusa vale: πa^2.
I cerchi di raggio pari alle misure dei cateti valgono: $\pi b^2 \;\; e \;\; \pi c^2$.
Per il teorema di Pitagora risulta: $a^2=b^2+c^2$ quindi: $\pi a^2=\pi b^2+\pi c^2$:

la proposizione è vera.

QUESITO 6

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} sen^2 x\ sen\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Se ne studi la continuità nel punto x =0.

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} sen^2 x\ sen\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2\ sen\frac{1}{x} = 0$$

Abbiamo sfruttato il fatto che per $x \to 0 \quad sen^2 x \sim x^2$ e poi applicato il teorema del confronto, secondo il quale, se f(x) è una funzione limitata e g(x) un infinitesimo per $x \to 0$, risulta:

$\lim_{x \to 0} f(x) g(x) = 0.$

Infatti se $A \leq f(x) \leq B$ e $g(x) \to 0$, risulta: $A \cdot g(x) \leq f(x) g(x) \leq B \cdot g(x)$ e siccome $A \cdot g(x) \to 0 \ e \ B \cdot g(x) \to 0$ anche $f(x) g(x) \to 0$.

Essendo $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ la funzione è continua in x=0.

QUESITO 7

Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \sqrt{sen\ x}$ e dall'asse stesso nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

Notiamo che la funzione nell'intervallo dato è non negativa ed in particolare vale 0 agli estremi ed è positiva negli altri punti. Il volume richiesto quindi è dato da:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{sen\ x}\right)^2 dx = \pi \int_0^\pi senx\ dx = \pi \cdot [-cosx]_0^\pi = \pi \cdot \big(1 - (-1)\big) =$$

$$= 2\pi \ \ u^3 = V$$

QUESITO 8

Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \frac{ax^2+6}{bx+3}$ *perché la curva rappresentativa ammetta un asintoto obliquo d'equazione* $y = x + 3$.

Deve essere*:* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m \quad e \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = 3.$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+6}{bx^2+3x} = \frac{a}{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{ax^2+6}{bx+3} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+6-bx^2-3x}{bx+3} = 3 \quad se:$$

$$a - b = 0 \quad e \quad -\frac{3}{b} = 3 \ \ da\ cui \quad b = -1 \quad e \quad a = -1$$

QUESITO 9

Si enunci il teorema di Lagrange e se ne fornisca un'interpretazione geometrica.

Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione y=f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo (a; b) allora esiste almeno un punto c in (a; b) tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Osserviamo che i punti $A = (a; f(a)) \ e \ \ B = (b; f(b))$ sono gli estremi del grafico della funzione di equazione y=f(x); inoltre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta AB ed $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto di ascissa c.
Il significato geometrico del teorema di Lagrange è quindi il seguente:

nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto interno all'arco di curva AB in cui la tangente è parallela alla congiungente i punti A e B.

QUESITO 10

Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione $F(x) = a\, sen^3x + b\, senx + 2x$ *sia una primitiva della funzione* $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$.

F(x) è una primitiva di f(x) se F'(x)=f(x). Quindi:

$$F'(x) = 3asen^2xcosx + bcosx + 2 = \cos^3 x - 3\cos x + 2$$

$$3acosx(1-\cos^2 x) + bcosx + 2 = -3\,a\cos^3 x + (3a+b)cosx + 2 = \cos^3 x - 3\cos x + 2$$

se:

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} ; \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -3 - 3a = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

Quindi F(x) è una primitiva di f(x) se $a = -\frac{1}{3}$ e $b = -2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria