PNI 2007 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione $y = \frac{2x^2+ax+3}{(x+1)^2}$ *dove a è un parametro reale.*

1)

Posto a = 4 si studi la C_4 *in assi cartesiani ortogonali (Oxy).*

$$\boldsymbol{C_4}: \quad \boldsymbol{y = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}}$$

Dominio:

$x \neq -1: \quad -\infty < x < -1 \;, \qquad -1 < x < +\infty$

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Intersezioni con gli assi:

x=0, y=3
y=0: $\quad 2x^2 + 4x + 3 = 0\,, \quad mai, essendo\ \Delta < 0$

Segno della funzione:

$f(x) > 0$ in tutto il dominio, essendo numeratore e denominatore sempre positivi.

Limiti:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2} = +\infty: \quad x = -1 \;\; asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2: \;\; y = 2 \;\; asintototo\ orizzontale$$

Ovviamente, essendoci asintoto orizzontale non può esserci asintoto obliquo.

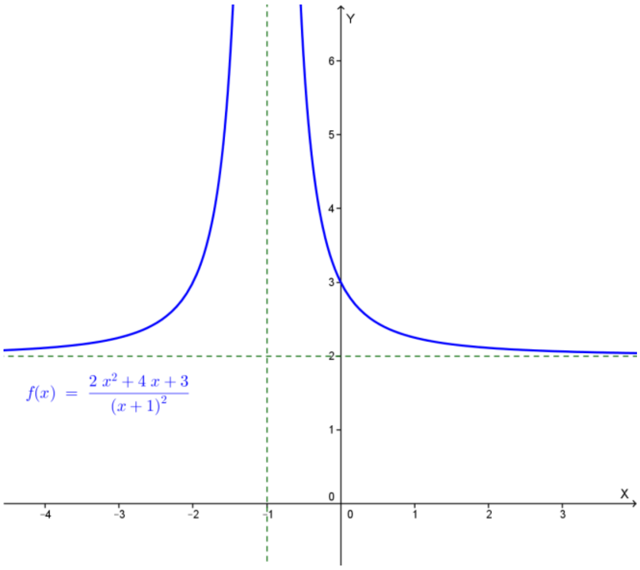
Derivata prima:

$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} > 0 \;\; se\ x < -1$: funzione crescente se $x < -1$, decrescente se $x > -1$; non ci sono massimi né minimi.

Derivata seconda:

$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^4} > 0$ in tutto il dominio: concavità sempre verso l'alto, nessun flesso.

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Mediante una traslazione si assumano come nuovi assi di riferimenti (O'XY) gli asintoti della C_4 e si scriva la nuova equazione $Y = f(X)$ della C_4 .

Le equazioni della traslazione che porta nei nuovi assi, con O'=(-1; 2) sono:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

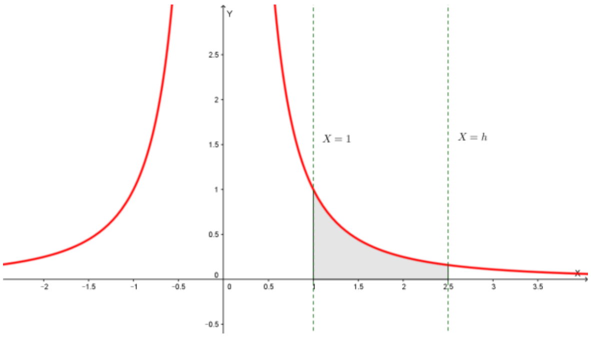
Quindi la funzione di equazione $y = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$ diventa: $Y + 2 = \frac{2(X-1)^2+4(X-1)+3}{X^2}$ da cui:

$$Y = f(X) = \frac{1}{X^2}$$

3)

Si calcoli quindi l'area della porzione di piano compresa fra la curva, l'asse X , la retta X = 1 e la retta X = h, essendo h un numero reale maggiore di 1. Si calcoli il limite di tale area per $h \rightarrow \infty$.

La regione richiesta è indicata nel seguente grafico:



L'area si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$Area = \int_1^h \frac{1}{X^2}\,dX = \left[-\frac{1}{X}\right]_1^h = -\frac{1}{h} + 1$$

Se $h \rightarrow \infty$ l'area tende a 1.

4)

Si tracci C_5 , corrispondente ad a = 5 rispetto al sistema (Oxy). Le curve C_4 e C_5 hanno un punto comune A, appartenente ad un asse. Si trovino le equazioni delle tangenti alle curve in A.

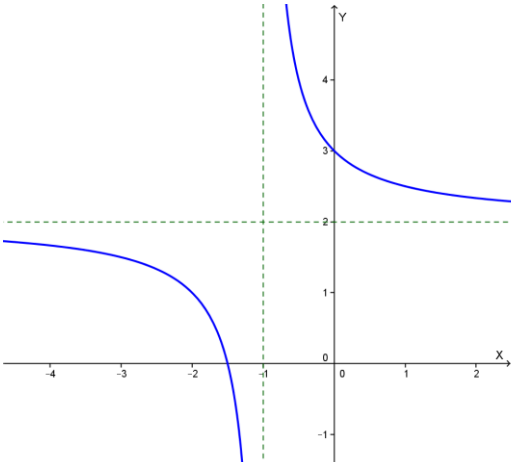
$$\boldsymbol{C_5}: \quad \boldsymbol{y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{(x+1)^2}}$$

Notiamo che $2x^2 + 5x + 3 = 0$ se $x = -1$ $e\ x = -\frac{3}{2}$ quindi:

$2x^2 + 5x + 3 = 2(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)(2x+3)$ quindi:

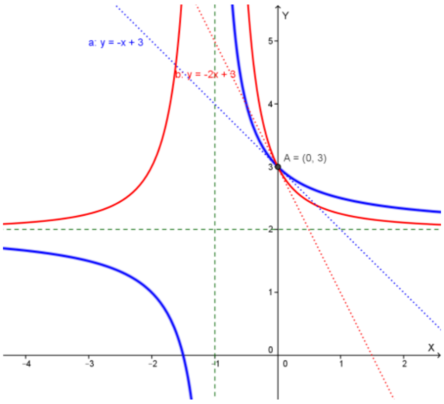
$$y = \frac{2x^2 + 5x + 3}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(2x+3)}{(x+1)^2} = \frac{2x+3}{x+1} \qquad con \quad x \neq -1$$

Quindi C_5 è una funzione omografica con centro $(-1; 2)$, asintoti x=-1 e y=2; se x=0 y=3. Quindi il suo grafico è il seguente:



Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano le due curve:

$$C_4: \quad y = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} \qquad C_5: \quad y = \frac{2x+3}{x+1}$$



Verifichiamo che le due curve hanno in comune un punto A su un asse cartesiano:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} \\ y = \dfrac{2x+3}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = \frac{2x+3}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{x^2 + 2x + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad y = 3: \quad A = (0; 3)$$

Cerchiamo la tangente in A alla curva C_4:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \;, \quad f'(0) = -2; \quad y - 3 = -2(x - 0), \quad y = -2x + 3$$

Cerchiamo la tangente in A alla curva C_5:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 2x + 1} \;, \quad f'(0) = -1; \quad y - 3 = -(x - 0), \quad y = -x + 3$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria