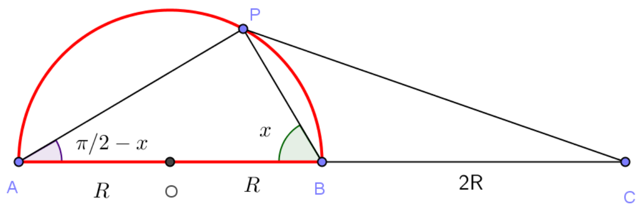
PNI 2007 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Data una semicirconferenza di diametro AB=2R , si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia BC = AB.
Essendo P un punto della semicirconferenza:

1)

Si esprima per mezzo di R e dell'ampiezza dell'angolo $x = A\hat{B}P$ *il rapporto*
$y = \dfrac{CP^2}{AP \cdot PB}$.



Calcoliamo la lunghezza dei segmenti richiesti:

$AP = 2Rsenx\ ,\quad PB = 2Rcosx$

Applicando il teorema del coseno al triangolo APC risulta:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4R^2sen^2x + 16R^2 - 16R^2senx\ senx =$$
$$= 16R^2 - 12R^2sen^2x$$

Risulta quindi:

$$y = \frac{CP^2}{AP \cdot PB} = \frac{16R^2 - 12R^2sen^2x}{4R^2senx\ cosx} = \frac{4 - 3sen^2x}{senx\ cosx} = y\ ,\quad con\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

2)

Si studi nell'intervallo $[0; 2\pi]$ *la funzione y = f(x) espressa per mezzo della tangente di x.*

Esprimiamo la funzione y=f(x) in funzione di tg x, dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 x$:

$$y = f(x) = \frac{4 - 3sen^2x}{senx\ cosx} = \frac{4sen^2x + 4\cos^2 x - 3sen^2x}{senx\ cosx} = \frac{sen^2x + 4\cos^2 x}{senx\ cosx} = \frac{tg^2x + 4}{tgx}$$

$$y = f(x) = \frac{tg^2x + 4}{tgx}$$

Dobbiamo studiare la funzione nell'intervallo $[0; 2\pi]$, ma osserviamo che la funzione ha periodo $T = \pi$, quindi possiamo limitare lo studio all'intervallo $[0; \pi]$.

Dominio:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Intersezioni con gli assi:

x=0 non ha senso
y=0: $tg^2x + 4 = 0\ ,\ mai.$

Segno ella funzione:

Essendo il numeratore sempre positivo, la funzione è positiva dove è positiva tgx, quindi:

$$f(x) > 0 \quad se \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{tg^2x + 4}{tgx} = +\infty : x = 0\ \ asintoto\ verticale$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{tg^2x + 4}{tgx} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{tg^2x}{tgx} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tgx = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{tg^2x + 4}{tgx} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{tg^2x}{tgx} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tgx = -\infty$$

Quindi $x = \frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale

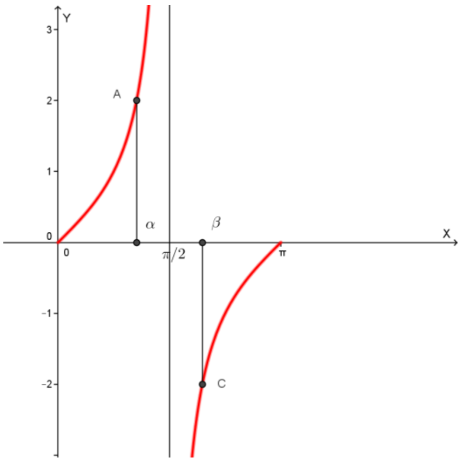
$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{tg^2x + 4}{tgx} = -\infty : x = \pi\ \ asintoto\ verticale$$

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{tg^4 - 3tg^2x - 4}{tg^2x} \geq 0 \quad se \quad tg^4 - 3tg^2x - 4 \geq 0\ ,\ \ (tg^2x - 4)(tg^2x + 1) \geq 0$$

$tg^2x - 4 \geq 0\,,\ \ tgx \leq -2\ \ vel\ \ tgx \geq 2$

Posto $\alpha = arctg\ 2 \cong 1.11\quad e\quad \beta = arctg(-2) = -arctg(2) = \pi - \alpha \cong 2.03$ risulta



$$\alpha \leq x < \frac{\pi}{2}\quad vel\quad \frac{\pi}{2} < x \leq \beta$$

Quindi la funzione è crescente se $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{\pi}{2} < x < \beta$, decrescente per $0 < x < \alpha$ e $\beta < x < \pi$

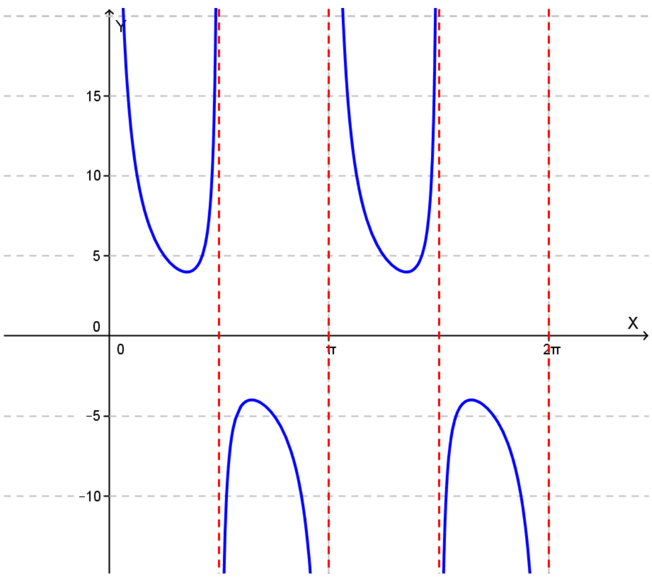
Per $x = \alpha$ abbiamo un minimo relativo, di ordinata $f(\alpha) = \frac{4+4}{2} = 4$; per $x = \beta$ abbiamo un massimo relativo, di ordinata $f(\beta) = \frac{4+4}{-2} = -4$

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2tg^6x + 2tg^4x + 8tg^2x + 8}{tg^3x} = \frac{(2tg^4x + 8)(tg^2x + 1)}{tg^3x} \geq 0\quad se\quad tgx > 0, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

Quindi il grafico volge la concavità verso l'alto se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e verso il basso se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
Non si hanno flessi.

Il grafico della funzione nell'intervallo richiesto è il seguente:



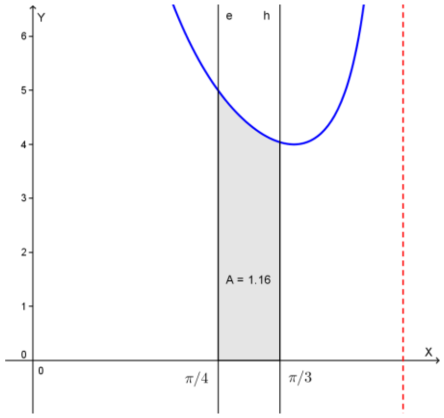
3)

Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) il valore di x, nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *, per cui il rapporto y assume il valore minimo.*

Abbiamo visto nel punto precedente che la funzione assume nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ il valore minimo per $\alpha = arctg\ 2 \cong 1.107\ radianti = 63.435° = 63° + 0.435 \cdot 60' = 63°26'$

4)

Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva rappresentativa della funzione y = f(x), dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ *e* $x = \frac{\pi}{3}$ *.*



L'area richiesta si ottiene mediante il seguente integrale:

$$Area = \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2x + 4}{tgx}\, dx = \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{3}} \left(tgx + \frac{4}{tgx}\right) dx = \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{senx}{cosx} + 4 \cdot \frac{cosx}{senx}\right) dx =$$

$$= [-\ln|cosx| + 4\ln|senx|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -ln\left(\frac{1}{2}\right) + 4ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left[-ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$$

$$= ln2 + 4\left(\frac{1}{2}ln3 - ln2\right) - 3ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ln2 + 2ln3 - 4ln2 - 3\left(\frac{1}{2}ln2 - ln2\right) =$$

$$= 2ln3 - \frac{3}{2}ln2 \cong 1.1575 = 1.16\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria