# PNI 2007 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

## QUESITO 1

*Si calcoli il limite della funzione* $y = \frac{\log(x+3)-\log(2x+1)}{x^2+x-6}$ *, quando x tende a 2.*

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0.

$$\frac{\log(x+3)-\log(2x+1)}{x^2+x-6} = \frac{log\frac{x+3}{2x+1}}{(x+3)(x-2)} = \frac{log\left(1+\frac{x+3}{2x+1}-1\right)}{(x+3)(x-2)} = \frac{log\left(1+\frac{2-x}{2x+1}\right)}{(x+3)(x-2)}$$

Ricordiamo che se $f(x) \to 0 \;\; allora \;\; \log(1+f(x)) \sim f(x)$ ,dove il logaritmo è inteso come logaritmo naturale. Quindi:

$$\frac{log\left(1+\frac{2-x}{2x+1}\right)}{(x+3)(x-2)} \sim \frac{\frac{2-x}{2x+1}}{5(x-2)} = -\frac{1}{5}\frac{1}{2x+1} \to -\frac{1}{25} \quad se \quad x \to 2$$

## QUESITO 2

*Si calcoli il valor medio della funzione* $y = |1-x^2|$ *nell'intervallo* $-2 \le x \le 3$ *.*

Ricordiamo che il valor medio di una funzione continua in un intervallo [a; b] è dato da:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Poiché $1-x^2 \ge 0 \;\; se \;\; -1 \le x \le 1$ otteniamo:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{-2}^{3}|1-x^2|dx = \frac{1}{5}\left[\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2+\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right)+\left(9-3-\frac{1}{3}+1\right)\right\} = \frac{1}{5}\cdot\frac{28}{3} = \frac{28}{15}$$

## QUESITO 3

*Data la funzione* $y = \sqrt{1-x^2}$*, si stabilisca se sono verificate le condizioni di validità del teorema di Rolle nell'intervallo* $-1 \le x \le 1$ *e, in caso affermativo, si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema.*

La funzione è continua nell'intervallo chiuso. Calcoliamo la derivata prima:

$y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ : derivabile nell'intervallo aperto.

$f(-1) = f(1) = 0$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle. Esisterà allora almeno un punto interno all'intervallo in cui la derivata si annulla:

$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad se \quad x = 0$ .

## QUESITO 4

*Si consideri la seguente proposizione: "una piramide è retta se la verticale calata dal vertice cade entro il poligono di base". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.*

La definizione di piramide retta è la seguente: "Una piramide si dice retta se il poligono di base è circoscrivibile ad una circonferenza e se la perpendicolare condotta dal vertice al piano di base cade nel centro della circonferenza inscritta".

Quindi la proposizione è falsa, in quanto contraddice la definizione di piramide retta.

## QUESITO 5

*La regione finita di piano delimitata dalla curva d'equazione* $y = \sqrt{sen\, x}$ *e dall'asse delle x nell'intervallo* $0 \le x \le \pi$ *è la base di un solido S le cui sezioni ottenute con piani perpendicolari all'asse x sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.*

Notiamo che la funzione nell'intervallo dato è non negativa ed in particolare vale 0 agli estremi ed è positiva negli altri punti. Il volume richiesto quindi è del tipo:

$V = \int_a^b A(x)dx$, dove A(x) è l'area della sezione. Nel nostro caso:

$$V(S) = \int_0^{\pi} \left(\sqrt{sen\, x}\right)^2 dx = \int_0^{\pi} senx\, dx = [-cosx]_0^{\pi} = \left(1-(-1)\right) = 2\ u^3$$

## QUESITO 6

*Si verifichi che la curva di equazione* $y = \frac{x-1}{x-2}$ *è simmetrica rispetto all'intersezione dei suoi asintoti.*

Si tratta di una funzione omografica il cui centro (punto di intersezione degli asintoti) ha coordinate: $C = (2; 1)$.

Le equazioni della simmetria rispetto a C sono:

$$\begin{cases} X = 2a - x \\ Y = 2b - y \end{cases}, \quad \begin{cases} X = 4 - x \\ Y = 2 - y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 4 - X \\ y = 2 - Y \end{cases}$$

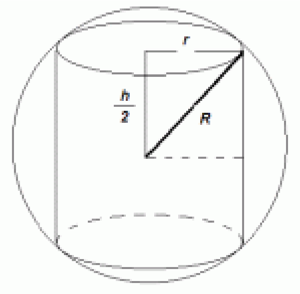
La curva data si trasforma in:

$$2 - Y = \frac{4 - X - 1}{4 - X - 2} = \frac{3 - X}{2 - X} \;, \quad Y = 2 - \frac{3 - X}{2 - X} \;, \quad Y = \frac{1 - X}{2 - X} = \frac{X - 1}{X - 2}$$

La curva trasformata coincide con la curva di partenza, quindi è simmetrica rispetto a C.

## QUESITO 7

*Si inscriva in una sfera di raggio R il cilindro di volume massimo.*




Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con h l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è dato da: $V(cilindro) = \pi r^2 h$ . Ma risulta:

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ quindi: $V(cilindro) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h = f(h)\,,\;\; con\; 0 \le h \le 2R$

Tale volume è massimo se lo è $y = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$; calcoliamo la derivata prima:

$$y' = R^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(-\frac{1}{2}h\right) = -\frac{3}{4}h^2 + R^2 \geq 0 \ \ se \quad h^2 \leq \frac{4}{3}R^2 \quad , \quad -R\sqrt{\frac{4}{3}} \leq h \leq R\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Quindi, con le limitazioni su h, la funzione è crescente se $0 < h < R\sqrt{\frac{4}{3}}$ e decrescente se $R\sqrt{\frac{4}{3}} < h < 2R$: la funzione ha quindi un massimo (assoluto) per $h = R\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.
Per tale valore di h si ha: $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}R^2 = \frac{2R^2}{3}$ , $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R è quello di altezza $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ e raggio di base $\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

## QUESITO 8

*È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado o ottenere almeno un 12 lanciando ventiquattro volte due dadi?*

Si tratta di una variante del noto problema di Méré, già proposto nella maturità PNI del 2002.

Siano:
$p_1$ =probabilità di ottenere almeno un 6 con 4 lanci di un dado
$q_1$ = probabilità di non ottenere mai 6 con 4 lanci di un dado= $\left(\frac{5}{6}\right)^4$
Risulta: $p_1 = 1 - q_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.518$

Siano:
$p_2$ =probabilità di ottenere almeno un 12 (doppio 6) con 24 lanci di due dadi
$q_2$ = probabilità di non ottenere mai un doppio 6 con 24 lanci di due dadi = $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$
Risulta: $p_2 = 1 - q_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0.491$

Quindi è più probabile ottenere almeno una volta 6 con 4 lanci di un solo dado piuttosto che almeno un 12 con 24 lanci di due dadi.

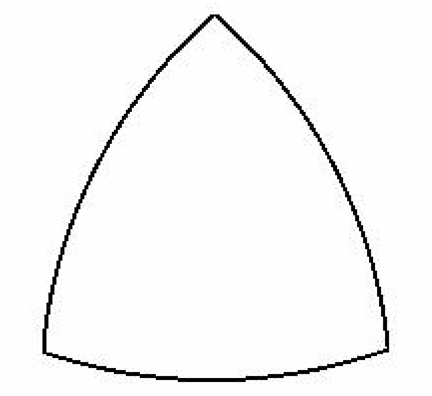
## QUESITO 9

*Si enunci il quinto postulato di Euclide e si descriva qualche modello di geometria non euclidea.*

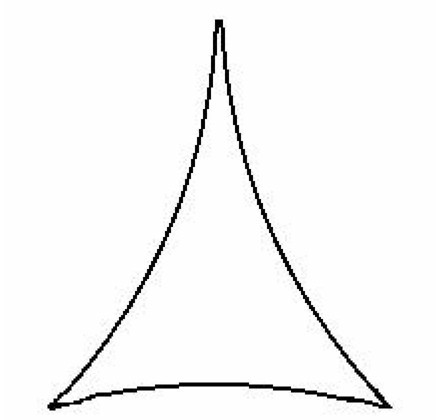
Quinto postulato di Euclide: *Per un punto esterno ad una retta passa UNA SOLA PARALLELA alla retta data.*

Osserviamo che da questo postulato discende la somma caratteristica degli angoli interni di un triangolo (un angolo piatto).

Se cade l'unicità delle parallele si hanno i seguenti casi:
- di parallele non ne esistono (**geometria ellittica**, modello di Riemann): la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di un angolo piatto
- la parallele non è unica (**geometria iperbolica**, modello di Poincaré, modello di Klein): in tal caso la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.



Triangolo ellittico



Triangolo iperbolico

Approfondimento su questa pagina di matefilia.it:

http://www.matefilia.it/argomen/euclide/sommario.htm

## QUESITO 10

*Si trovi per quali valori di k ammette soluzione l'equazione trigonometrica* $sin\, x + \, cos\, x = \, k.$

Risulta:

$$sin\, x + \, cos\, x = \sqrt{2}\, sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = k \quad \Rightarrow \quad sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Poiché il seno di un angolo è compreso fra -1 ed 1, deve essere:

$$-1 \leq \frac{k}{\sqrt{2}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria