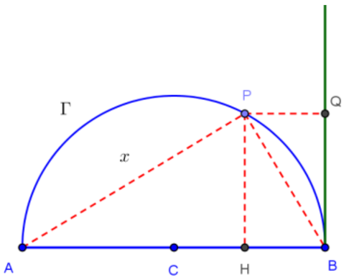
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2008 – PROBLEMA 1

Si fissi nel piano la semicirconferenza Γ che ha centro in C e diametro AB=2 e si affrontino le seguenti questioni:

1)

Si determini su Γ un punto P tale che detta Q la sua proiezione ortogonale sulla tangente in B a Γ, si abbia AP+PQ=k ove k è un parametro reale diverso da zero.



Posto AP=x ($0 \leq x \leq 2$) abbiamo (primo teorema di Euclide):

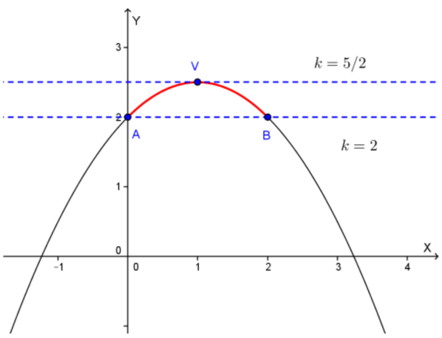
$x^2 = AB \cdot AH = 2AH, \quad AH = \frac{1}{2}x^2, \quad BH = PQ = 2 - AH = 2 - \frac{1}{2}x^2.$

La relazione proposta diventa quindi:

$$x + 2 - \frac{1}{2}x^2 = k, \ \ con\ k > 0\ e \quad 0 \leq x \leq 2$$

Poniamo $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ e studiamo le intersezioni con la retta y=k con le limitazioni suddette.

La parabola ha vertice nel punto $V = \left(1; \frac{5}{2}\right)$, taglia l'asse delle y in y=2 e per x= 2 risulta: $y = 2$. Si ha la seguente situazione grafica:

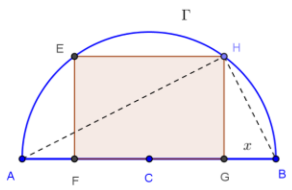


Il problema ammette due soluzioni per

$$2 \leq k \leq \frac{5}{2}$$

2)

Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ*.*



Poniamo BG=x; risulta $0 \leq x \leq 1$; la base FG del rettangolo vale $2 - 2x$.
Per il secondo teorema di Euclide abbiamo:
$HG^2 = x(2-x)$. L'area del rettangolo è quindi:
$Area(EFGH) = FG \cdot HG = (2-2x)\sqrt{x(2-x)}$
Tale area è massi ma se lo è il suo quadrato, cioè se è massima la funzione:
$y = (2-2x)^2 x(2-x) = (4-8x+4x^2)(2x-x^2),\ \ con\ \ 0 \leq x \leq 1$
Questa funzione è continua (e derivabile) in un intervallo chiuso e limitato quindi, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluto, da ricercarsi fra i valori agli estremi, gli eventuali punti di non derivabilità (qui non presenti) e gli zeri della derivata prima. Agli estremi dell'intervallo la funzione vale zero. Calcoliamo la derivata prima:

$y' = (-8+8x)(2x-x^2) + (4-8x+4x^2)(2-2x) = -8(x-1)(2x^2-4x+1) = 0$ quando:

$x = 1$ (in tal caso y vale zero) e $(2x^2-4x+1) = 0,\ x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}; essendo\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$ il valore richiesto è $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (per tale valore di x la y è positiva). In tal caso si ha:

$FG = 2 - 2x = \sqrt{2}$ ed $HG = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

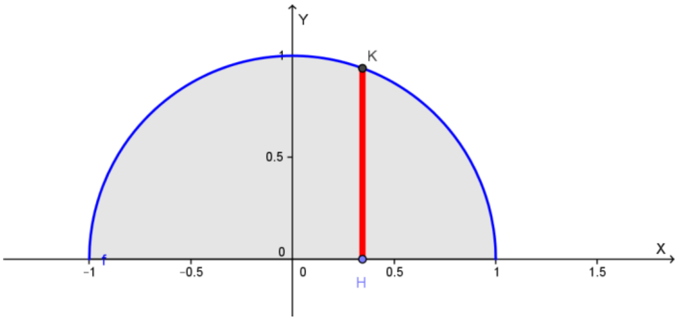
Il rettangolo di area massima è quello di base $\sqrt{2}$ e altezza $\frac{\sqrt{2}}{2}$: quindi quello la cui base è doppia dell'altezza.

3)

Si calcoli il volume del solido che ha per base il semicerchio delimitato da Γ *e tale che tagliato con piani ortogonali ad AB dia tutte sezioni quadrate.*

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine nel centro della circonferenza e asse x coincidente con la retta che contiene il diametro AB, l'equazione della circonferenza è: $x^2 + y^2 = 1$. Il quadrato sezione ha area $A(x) = y^2 = 1 - x^2$.
Il volume richiesto è quindi:

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2\int_0^1(1-x^2)dx=2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}u^3=V$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria