Scuole italiane all'estero (Americhe) 2008 – PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche:

1)

Si studino e si rappresentino graficamente le funzioni f e g definite per ogni numero reale non nullo, rispettivamente, da $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *e* $g(x) = x - \frac{1}{x}$ *e si dica se è vero che la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2.*

Studiamo la funzione f.

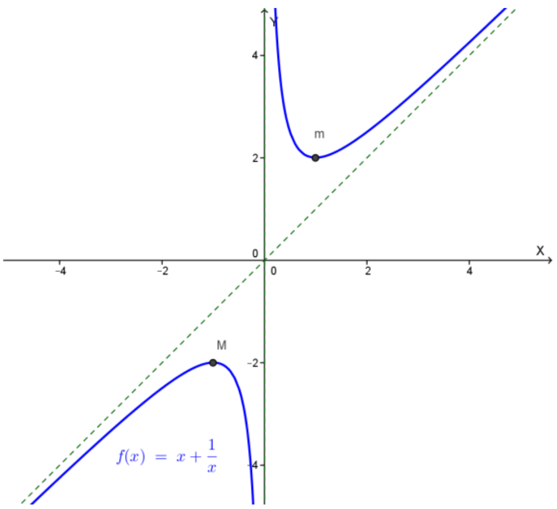
$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad y = x + \frac{1}{x}$$

La funzione può essere scritta nella forma $xy = x^2 + 1,\ x^2 - xy + 1 = 0$; si tratta quindi di una conica; e siccome la funzione ha chiaramente l'asintoto x=0 (perché il limite per x che tende all'infinito è 0), possiamo concludere che si tratta di un'iperbole. L'altro asintoto lo possiamo trovare nel modo classico:

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m, \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[x + \frac{1}{x} - x\right] = 0 = q$. Quindi l'atro asintoto ha equazione y=x.

Per completare lo studio della funzione è sufficiente trovare il massimo ed il minimo, che si ottengono annullando la derivata prima:

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \ \ se\ x = \pm 1$. Quindi il massimo M ha coordinate M=(-1; -2) ed il minimo m ha coordinate m=(1; 2). Il grafico della f è quindi il seguente:



Studiamo la funzione g.

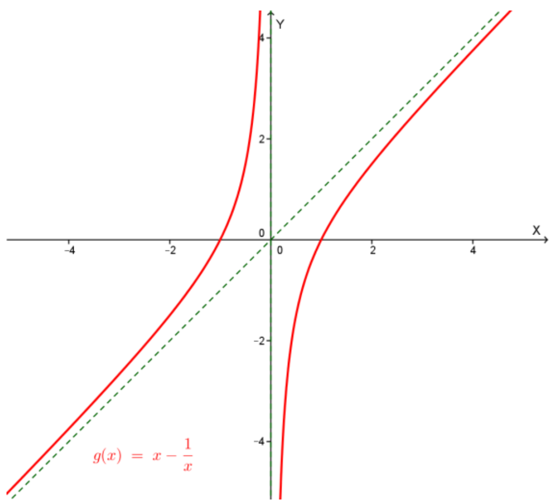
$g(x) = x - \frac{1}{x}$, $\quad y = x - \frac{1}{x}$

La funzione può essere scritta nella forma $xy = x^2 - 1,\ x^2 - xy - 1 = 0$; si tratta quindi di una conica; e siccome la funzione ha chiaramente l'asintoto x=0 (perché il limite per x che tende all'infinito è 0), possiamo concludere che si tratta di un'iperbole. L'altro asintoto lo possiamo trovare nel modo classico:

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m, \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[x - \frac{1}{x} - x\right] = 0 = q$. Quindi l'atro asintoto ha equazione y=x.

Per completare lo studio della funzione è sufficiente trovare il massimo ed il minimo, che si ottengono annullando la derivata prima:

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = 0\ \ mai$. Quindi g non ha massimi né minimi ed è crescente sia per x<0 sia per x>0. Il grafico della g è quindi il seguente:

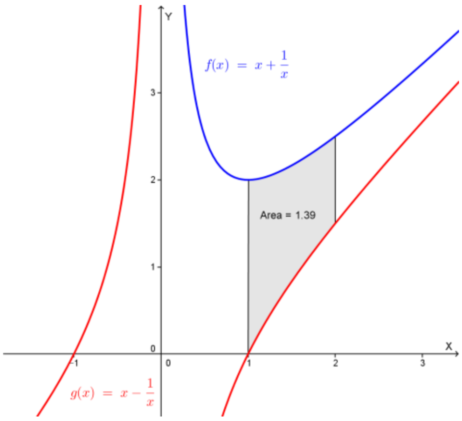


Analizzando il grafico della funzione $f(x) = x + \frac{1}{x}$ per $x > 0$ osserviamo che il minimo è 2; possiamo quindi concludere che $x + \frac{1}{x} \geq 2$ per ogni $x > 0$. Pertanto è vero che:
la somma di un numero positivo e del suo inverso è almeno 2.

2)

Si calcoli l'area della parte di piano compresa tra i grafici di f e g per $1 \leq x \leq 2$ *e disponendo di una calcolatrice elettronica se ne dia un valore approssimato a meno di* 10^{-2}.

La parte di piano richiesta è indicata nel seguente grafico:



L’area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_1^2 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^2 \frac{2}{x} d = 2[\ln|x|]_1^2 =$$
$$= 2\ln(2) \cong 1.39\, u^2 = Area.$$

3)

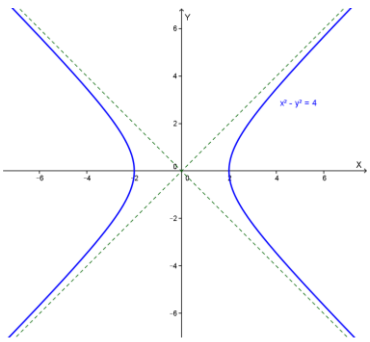
Sia P un punto del piano di coordinate $\left(t + \frac{1}{t}; t - \frac{1}{t}\right)$. *Al variare di* t *(*$t \neq 0$*) , P descrive un luogo geometrico del quale si chiede l’equazione cartesiana e il grafico.*

Il luogo descritto da P ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}; \quad x + y = 2t\,; \quad t = \frac{1}{2}(x+y)\,; \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2}(x+y) \\ y = t - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{2}{x+y} \end{cases}; \quad quindi:$$

$$y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{2}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4}{2(x+y)}; \qquad 2y(x+y) = (x+y)^2 - 4; \quad x^2 - y^2 = 4\,.$$

Il luogo descritto da P è l’iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani, con asse trasverso l’asse x e semiassi lunghi 2.



Con la collaborazione di Angela Santamaria