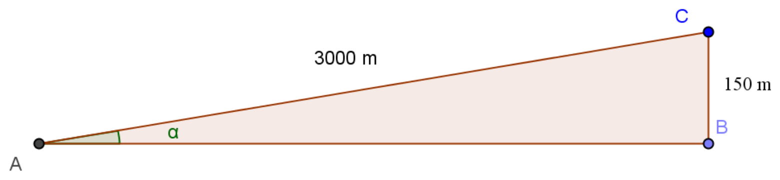
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2008 – Quesiti

QUESITO 1

Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150 m con un percorso di 3 km. Quale è la sua inclinazione?



Detto α l'angolo formato da AC (percorso in salita) con l'orizzontale AB, e detto BC il dislivello, risulta:

$$sen(\alpha) = \frac{150}{3000} = 0.05\,, \quad \alpha = \arcsin(0.05) \cong 2.87° \cong 2°52'$$

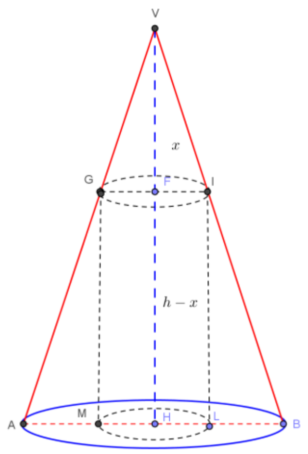
L'inclinazione è di circa $2°52'$.

Osserviamo che la pendenza è data da $tg\alpha = \frac{BC}{AB}$, ed è $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} \cong 2996.25$

Pertanto: $tg\alpha = \frac{BC}{AB} \cong \frac{150}{2996.25} \cong 0.05006 \cong 5\ \%$: la pendenza è di circa il 5 %.

QUESITO 2

Si provi che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.



Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot FG^2 \cdot (h - x)$$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x:

$$AH{:}FG = VH{:}VF\,, \quad r{:}FG = h{:}x, \quad FG = \frac{x \cdot r}{h}$$

Quindi:

$$V(cilindro) = \pi \cdot \left(\frac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = x^2 \cdot (h - x), \quad con \;\; 0 \le x \le h$$

Il problema è di facile soluzione con l'uso delle derivate, proponiamo un metodo elementare.
Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: a=x e b=h-x .

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}$, $x = 2h - 2x$, $x = \frac{2}{3}h$.

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono.

QUESITO 3

Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un k tale che $\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$?

Il simbolo $\binom{n}{k}$ indica le combinazioni di n oggetti a k a k, con n numero naturale non nullo e k numero naturale non superiore ad n. Risulta:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

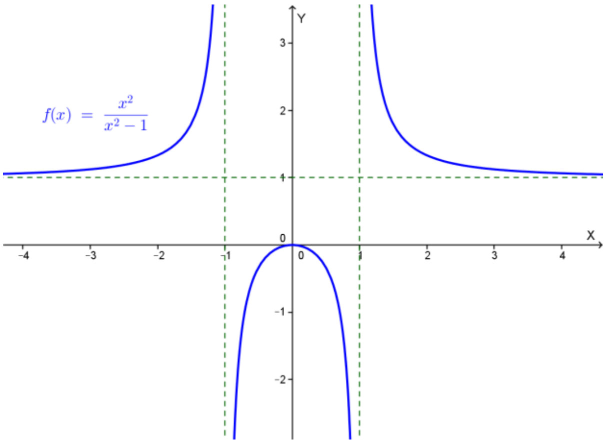
$\binom{12}{k} = \binom{12}{k-3}$ se k=k-3: impossibile, oppure, essendo $\binom{12}{k} = \binom{12}{12-k}$, se 12-k=k-3, k=15/2.

Siccome k deve essere intero, non esiste alcun valore di k che risolve il problema.

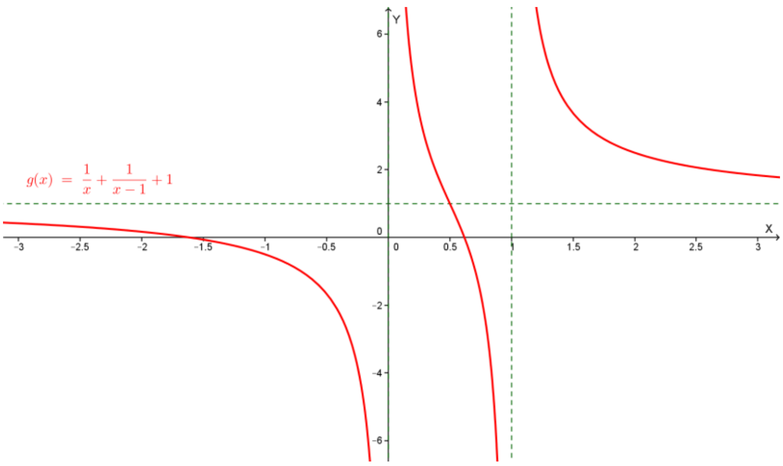
QUESITO 4

Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentino due asintoti verticali e un asintoto orizzontale.

La funzione $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2}{x^2-1}$, funzione razionale fratta in cui il grado dl numeratore è uguale al grado del denominatore, ammette gli asintoti verticali x=1 e x=-1 e l'asintoto orizzontale y=1. Il suo grafico è il seguente:



Un altro esempio è la funzione: $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + 1$, che ha gli asintoti verticali x=0 e x=1 e l'asintoto orizzontale y=1. Il suo grafico è il seguente:

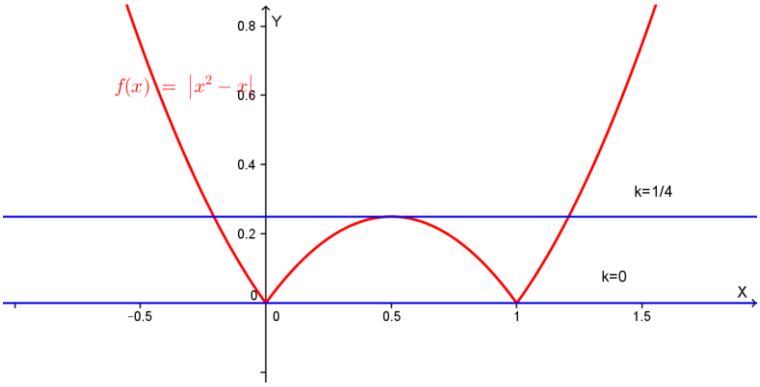


QUESITO 5

Si calcolino il numero delle soluzioni dell'equazione: $|x^2 - x| = k$ *al variare di* $k \in R$.

Il problema equivale a trovare il numero delle intersezioni fra la curva di equazione $y = |x^2 - x|$ e la retta di equazione $y = k$.

Il grafico di $y = |x^2 - x|$ si ottiene dal grafico della parabola di equazione $y = x^2 - x$ confermando la parte positiva e ribaltando rispetto all'asse x la parte negativa.
La parabola ha vertice in $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, taglia l'asse x nei punti di ascissa 0 ed 1 ed ha la concavità verso l'alto. Il grafico di $y = |x^2 - x|$ e della retta y=k sono i seguenti:



L'equazione ha quindi:
2 soluzione se $k > \frac{1}{4}$ $e\ k = 0$
4 soluzioni se $0 < k \leq \frac{1}{4}$ (di cui due coincidenti per $k = \frac{1}{4}$).

QUESITO 6

Quante diagonali ha un poligono di 2008 lati?

Il numero delle diagonali di un poligono di n lati è uguale a $\frac{n(n-3)}{2}$.
Per n=2008 si ha:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{2008 \cdot 2005}{2} = 2013020$$

Dimostrazione diretta della formula

Da ogni vertice escono n-3 diagonali; i vertici sono n, quindi n(n-3) diagonali; ma in tal modo ogni diagonale è contata due volte (una diagonale congiunge due vertici non adiacenti), quindi il numero totale delle diagonali è appunto $\frac{n(n-3)}{2}$.

QUESITO 7

Dati nel piano cartesiano i punti di coordinate reali $P(x, |x|)$ e $Q(x, \sqrt{4 - x^2})$ si determini, al variare di x, l'insieme dei punti Q la cui ordinata è minore dell'ordinata di P.

Dobbiamo risolvere la disequazione: $\sqrt{4 - x^2} < |x|$. Dobbiamo risolvere il sistema:

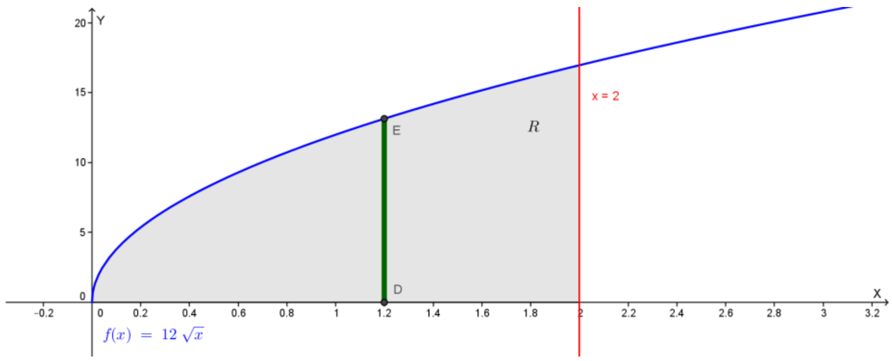
$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0; \quad -2 \leq x \leq 2 \\ 4-x^2 < x^2; \quad 2x^2 > 4; \quad x < -\sqrt{2} \; or \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi: $-2 \leq x < -\sqrt{2}$ oppure $\sqrt{2} < x \leq 2$ (possibili ascisse di Q).

QUESITO 8

La regione R delimitata dal grafico di $y = 12\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x=2 è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

Rappresentiamo la regione R:



La sezione è un triangolo equilatero di lato $DE = f(x) = 12\sqrt{x}$, e la sua area A(x) è quindi

$$Area(sezione) = DE^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 144x \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 36x\sqrt{3}$$

Il volume V(S) è quindi dato da:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_0^2 36x\sqrt{3}dx = 36\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 36\sqrt{3}(2) = 72\sqrt{3}\,u^3 \cong 124.708\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria