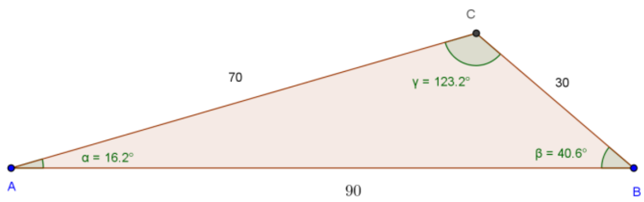
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – Suppletiva

QUESITO 1

Le misure dei lati di un triangolo sono 30, 70 e 90 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.



In base al teorema del coseno risulta:

$30^2 = 70^2 + 90^2 - 2 \cdot 70 \cdot 90 \cdot \cos(\alpha), \quad \cos(\alpha) = \frac{70^2+90^2-30^2}{2 \cdot 70 \cdot 90} = \frac{121}{126}$ quindi:

$$\alpha = arccos\left(\frac{121}{126}\right) \cong 16.195° \cong 16° + (0.195 \cdot 60)' \cong 16°12' = \alpha$$

In modo analogo si può trovare β:

$$\cos(\beta) = \frac{90^2 + 30^2 - 70^2}{2 \cdot 90 \cdot 30} = \frac{41}{54}, \quad \beta = arccos\left(\frac{41}{54}\right) \cong 40.601° \cong 40°36' = \beta$$

Ed infine:

$$\gamma = 180° - 16°12' - 40°36' = 180° - 56°48' = 123°12'$$

QUESITO 2

Si dimostri che le espressioni $y = 2sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ *e* $y = senx - \sqrt{3}cosx - 2$ *definiscono la stessa funzione f . Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.*

$y = senx - \sqrt{3}cosx - 2 = 2\left(\frac{1}{2}senx - \frac{\sqrt{3}}{2}cosx\right) - 2 = 2sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$ *c.v.d.*

Oppure, partendo dalla prima funzione:

$$y = 2sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 2\left(senx\cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3}cosx\right) - 2 = 2\left(\frac{1}{2}senx - \frac{\sqrt{3}}{2}cosx\right) - 2 =$$
$= 2sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

Osserviamo che in generale la funzione lineare in seno e coseno:

$$y = asenx + bcosx$$

si può trasformare in

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}\, sen(x + \alpha), \quad con \quad tg\alpha = \frac{b}{a}, \quad \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

QUESITO 3

Si diano esempi di funzioni i cui grafici presentano un asintoto verticale e un asintoto orizzontale.

$y = \frac{x^2+1}{x^2}$: asintoto verticale x=0 e asintoto orizzontale $y = 1\ per\ x \to \infty$

$y = 3 + e^{-x} + \frac{1}{x-2}$: asintoto orizzontale $y = 3\ per\ x \to +\infty$, asintoto verticale x=2.

QUESITO 4

Si enunci il teorema del valor medio o di Lagrange e se ne illustrino il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle funzioni.

Il teorema di Lagrange afferma:

Sia y=f(x) una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo aperto (a; b). Esiste allora almeno un punto c nell'intervallo aperto tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Il teorema di Rolle è un corollario del teorema di Lagrange. Aggiungendo alle ipotesi del teorema di Lagrange l'ipotesi che sia f(a)=f(b), esso afferma che esiste almeno un punto c nell'intervallo aperto (a; b) in cui si annulla la derivata prima.

Infatti, se f(a)=f(b), per il punto c di cui parla il teorema di Lagrange si ha:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Come corollario del teorema di Lagrange si ha il seguente teorema, che permette di studiare la monotonia di una funzione:

Nelle ipotesi del teorema di Lagrange, se la derivata della funzione nell'intervallo (a;b) è positiva allora la funzione è in esso crescente, se è negativa è decrescente.

Dimostriamo che se in (a;b) la funzione ha derivata positiva allora è ivi crescente.
A tal fine occorre dimostrare che, scelti due punti qualsiasi x_1 e x_2 bell'intervallo, se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$.
La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1; x_2]$, quindi esiste almeno un punto c tra x_1 e x_2 tale che:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Ma per l'ipotesi sul segno della derivata risulta $f'(c) > 0$, quindi, essendo il denominatore positivo, deve esserlo anche il numeratore, pertanto:
$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad da\ cui \quad f(x_2) > f(x_1)$, come si voleva dimostrare.

In modo del tutto analogo si dimostra il caso derivata negativa- funzione decrescente.

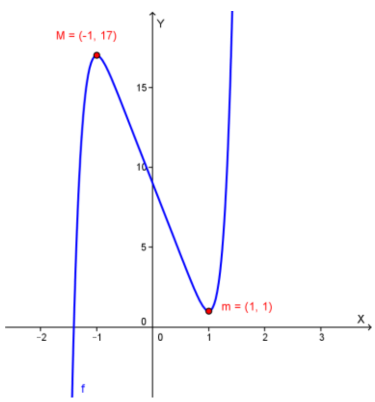
QUESITO 5

Si dimostri che l'equazione $x^9 - 9x + 9 = 0$ *ha una sola radice reale.*

La funzione $f(x) = x^9 - 9x + 9$ è continua e derivabile su tutto l'asse reale.
La sua derivata prima è:

$$f'(x) = 9x^8 - 9 \geq 0 \ \ se \ \ x \leq -1, \ \ x \geq 1$$

Il grafico quindi è crescente per x<-1 e per x>1 e decrescente per -1<x<1, quindi x=-1 è punto di massimo relativo (con ordinata 17); x=1 è punto di minimo relativo (con ordinata 1). Siccome per x che tende a meno infinito la funzione tende a più infinito e per x che tende a più infinito tende a più infinito, il grafico qualitativo ci dimostra che la funzione si annulla una sola volta, quindi l'equazione data ha una sola soluzione reale:



QUESITO 6

Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero?

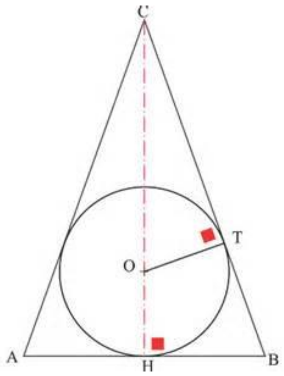
Dobbiamo utilizzare le cifre 2, 4, 6, 8. I numeri di quattro cifre distinte che possiamo scrivere utilizzando le quattro cifre pari non nulle sono tanti quante le disposizioni semplici di 4 oggetti a 4 a 4, equivalenti alle permutazioni di quattro oggetti:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

QUESITO 7

Fra tutti i cono circoscritti ad una data sfera, si trovi quello che ha volume minimo.

Sia R il raggio della sfera data.



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre:

$CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R^\wedge 2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$

Pertanto:

$$\sqrt{x^2 - 2Rx} : R = x : BH \quad , \quad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2 - 2Rx}}{x - 2R}$$

Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x - 2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x - 2R}, \quad con\ x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x - 2R}$$

$$y' = \frac{x(x - 4R)}{(x - 2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

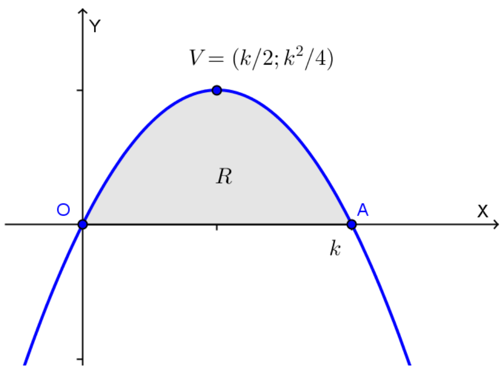
Il volume del cono circoscritto alla sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

N.B.
Il quesito è stato già assegnato nella sessione suppletiva del PNI del 2002 (problema 2).

QUESITO 8

Si determini k in modo che valga 4/3 l'area dell'insieme piano delimitato dall'asse x e dalla parabola d'equazione $y = -x^2 + kx$.

La parabola, il cui grafico volge la concavità verso il basso, ha vertice $V = \left(\frac{k}{2}; \frac{k^2}{4}\right)$ e taglia l'asse x nell'origine e nel punto di ascissa x=k. Il suo grafico (scegliamo per semplificare k>0) è del tipo:



La regione richiesta R è un segmento parabolico di base $OA = k$ e altezza $k^2/4$.
Per il teorema di Archimede l'area di tale regione è:

$$Area(R) = \frac{2}{3} \cdot k \cdot \frac{k^2}{4} = \frac{1}{6}k^3 = \frac{4}{3} \quad se \quad k^3 = 8 \quad da\ cui \quad k = 2.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria