Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – Suppletiva

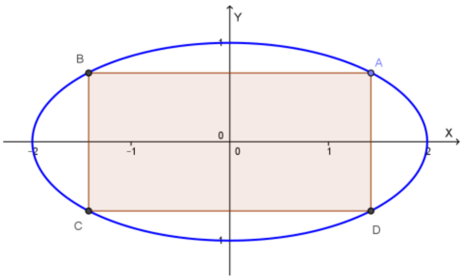
PROBLEMA 1

Un'ellisse Σ ha gli assi di lunghezza 4 e 2 e i fuochi sull'asse delle ascisse.

a)

Si determini l'equazione canonica di Σ e si inscriva in essa il rettangolo di area massima.

L'ellisse ha equazione: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Sia A=(x; y) il vertice del rettangolo posto nel primo quadrante, quindi è $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$:



L'area del rettangolo è:

$$Area(ABCD)=2x\cdot 2y=4xy, \quad con \ \frac{x^2}{4}+y^2=1, da\ cui:\ y^2=1-\frac{x^2}{4}$$

L'area è massima se lo è: $z=x^2y^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=x^2-\frac{1}{4}x^4$

Metodo delle derivate

$z'=2x-x^3\ge 0\ \ se\ \ x^3-2x\le 0,\ \ x(x^2-2)\le 0$ ed essendo $x\ge 0$ deve essere $x^2-2\le 0,\ cioè:\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. Quindi z è crescente se $0<x<\sqrt{2}$ e decrescente se $x>\sqrt{2}$. Pertanto z (ed anche l'area del rettangolo) è massima se $x=\sqrt{2}$.

Metodo elementare

$x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=4\left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$ massimo se lo è: $\left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$. Trattandosi del prodotto di due quantità a somma costante (1), il massimo si ha quando le due quantità sono uguali, quindi: $\frac{1}{4}x^2=1-\frac{x^2}{4}, \frac{1}{2}x^2=1,\ x^2=2,\ x=\sqrt{2}$ (come già visto).

b)

Detto P(x, y) un punto di Σ con y > 0, si esprima in funzione di x la somma f (x) delle coordinate di P. Si studi f (x) e se ne tracci il grafico γ.

P=(x; y), con y>0 e $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Risulta:

$$f(x)=x+y=x+\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$$

Dobbiamo quindi studiare le funzione:

$$\boldsymbol{f(x)=x+\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}$$

Osserviamo che la funzione può essere vista nella seguente forma:

$$y=\ x+\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\ \ ,\quad y-x=\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\ ,\ \ (y-x)^2=1-\frac{1}{4}x^2\ \ con\ \ y\geq x$$

$$(y-x)^2=1-\frac{1}{4}x^2\quad\Rightarrow\quad y^2-2xy+x^2-1+\frac{1}{4}x^2=0,\qquad \frac{5}{4}x^2-2xy+y^2-1=0$$

$$5x^2-8xy+4y^2-4=0,\ con\ \ b^2-4ac=64-80<0: ellisse.$$

La nostra funzione è quindi la parte di questa ellisse (con centro in O e ruotata) che si trova al di sopra della bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Studiamo comunque la funzione il metodo dell'analisi.

Dominio

$$1-\frac{1}{4}x^2\geq 0,\ \ 4-x^2\geq 0,\ \ \ -2\leq x\leq 2$$

Siccome f(-x) è diverso sia da f(x) sia da –f(x) la funzione non è pari né dispari.

Intersezioni con gli assi

$$Se\ x=0: y=1,\ se\ y=0\ \ x+\sqrt{1-\tfrac{1}{4}x^2}=0,\ \sqrt{1-\tfrac{1}{4}x^2}=-x\ e,\ ponendo\ x\leq 0:$$

$$1-\tfrac{1}{4}x^2=x^2,\quad \tfrac{5}{4}x^2=1,\quad x^2=\tfrac{4}{5},\quad x=-\sqrt{\tfrac{4}{5}}\,.$$

La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, quindi non ci sono limiti da calcolare; valori agli estremi: $f(-2) = -2,\ f(2) = 2$.

Derivata prima

$$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{2}x}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} = 1 - \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \ \ se \quad \frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} \leq 1 \ , \ \ x \leq 2\sqrt{4-x^2}$$

equivalente ai due sistemi:

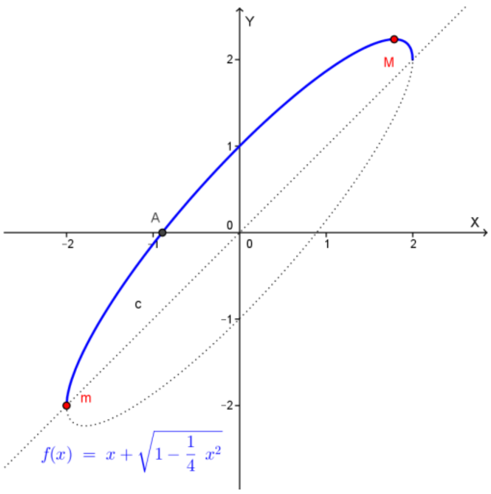
$$\begin{cases} x < 0 \\ 4 - x^2 \geq 0\ ;\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} : -2 \leq x < 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 4(4-x^2);\quad 5x^2 \leq 16\ ;\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} : \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Quindi $f'(x) \geq 0 \ \ se \ \ -2 \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$: la funzione è crescente per $-2 \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{5}}$ e dcrescente per $\frac{4}{\sqrt{5}} < x \leq 2$. Pertanto x=-2 è punto di minimo assoluto e $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata $f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Avendo osservato che la curva è parte di un'ellisse, non occorre studiare la derivata seconda (non ci possono essere flessi).

Il grafico della funzione è il seguente:



c)

Sia R l'insieme piano delimitato da γ, dall'asse delle x, dalle rette x=0 e x=2. Si calcoli il volume del solido generato da R in una rotazione completa attorno all'asse x.

Il volume richiesto si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$V = \pi \int_0^2 \left(x + \sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(x^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2 + 2x\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2} \right) dx =$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^2 + 1 + x\sqrt{4 - x^2} \right) dx = \pi \left[\frac{1}{4}x^3 + x \right]_0^2 - \frac{\pi}{2} \int_0^2 -2x(4 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \pi(2 + 2) - \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{3}(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 4\pi - \frac{\pi}{3}\left(0 - (4)^{\frac{3}{2}} \right) = 4\pi + \frac{\pi}{3}(8) = \left(\frac{20}{3}\pi \right) \ u^3 \cong 20.944 \ u^3$$

Il volume del solido è $\left(\frac{20}{3}\pi\right) u^3 \cong 20.944 \ u^3$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria