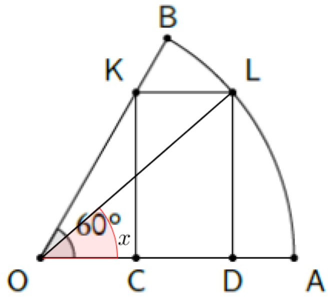
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – Suppletiva

PROBLEMA 2

È assegnato il settore circolare AOB con $\overline{OB} = \overline{OA} = r$ *e* $A\hat{O}B = 60°$.

a)

Sia CDLK il rettangolo inscritto nel settore circolare con il lato CD su OA. Si esprimano in funzione di $A\hat{O}L = x$ *le dimensioni del rettangolo.*



Osserviamo che $0 \le x \le 60°$.

Si ha: $DL = OL(senx) = rsenx = KC$, $OD = rcosx$, $OC = KC\left(tg(30°)\right) = (rsenx)\frac{\sqrt{3}}{3}$

Quindi: $CD = OD - OC = rcosx - (rsenx)\frac{\sqrt{3}}{3}$

b)

Si determini per quale valore di x il rettangolo ha area massima.

L'area del rettangolo è: $Area(CDLK) = CD \cdot DL = \left(rcosx - (rsenx)\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(rsenx) =$

$= r^2\left(senxcosx - \frac{\sqrt{3}}{3}sen^2x\right)$. Tale area è massima se lo è la funzione:

$y = senxcosx - \frac{\sqrt{3}}{3}sen^2x$, $con \quad 0 \le x \le 60°$. Ma risulta:

$$y = senxcosx - \frac{\sqrt{3}}{3}sen^2x = \frac{1}{2}sen(2x) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(3sen(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) - \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}sen(2x) + \cos(2x) - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sen(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[sen(2x+30°) - \frac{1}{2}\right]$$

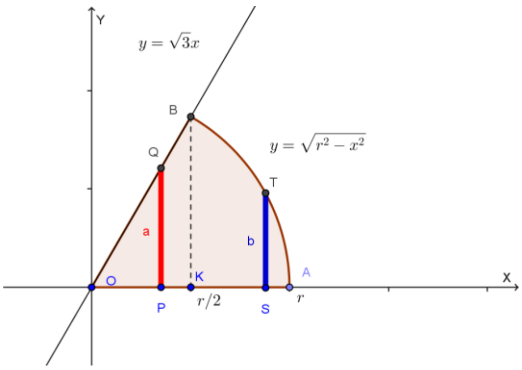
Questa espressione è massima se lo è $sen(2x+30°)$, che assume il valore massimo quando: $sen(2x+30°) = 90°\ ,\quad x = 30°$.

Il rettangolo ha area massima quando $x = 30°$.

c)

Il settore AOB è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani ortogonali al lato OA sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di S.

Rappresentiamo il settore circolare in un sistema di riferimento con origine O e asse x coincidente con la retta OA.



La retta OB ha equazione $y = (tg(60°)x = \sqrt{3}x$; l'arco AB ha equazione: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Il lato del quadrato sezione da O a K è $a = \sqrt{3}x$, quello del quadrato sezione da k ad A è $b = \sqrt{r^2 - x^2}$. Le aree dei due generici quadrati sono quindi: $A(x) = a^2 = 3x^2$ e $B(x) = b^2 = r^2 - x^2$. Notiamo poi che $OK = OBcos(60°) = \frac{1}{2}r$. Quindi:

$$V = \int_0^{\frac{r}{2}} 3x^2 dx + \int_{\frac{r}{2}}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = [x^3]_0^{\frac{r}{2}} + \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{r}{2}}^{r} =$$

$$= \frac{1}{8}r^3 + \left[r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(\frac{1}{2}r^3 - \frac{1}{24}r^3\right)\right] = \frac{1}{8}r^3 + \frac{2}{3}r^3 - \frac{11}{24}r^3 = \left(\frac{1}{3}r^3\right)\ u^3$$

Il solido ha volume $\left(\frac{1}{3}r^3\right)\ u^3$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria