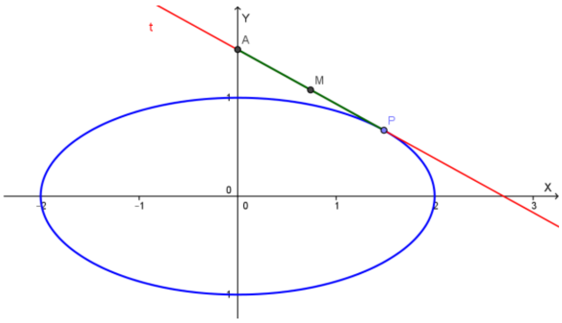
## Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – PROBLEMA 1

*L'ellisse* $\Sigma$ *ha equazione* $x^2+4y^2=4$ *e P(a; b), con* $b \geq 0$, *è un suo punto.*

### 1)

*Si determini l'equazione della tangente a* $\Sigma$ *in P e se ne indichi con Q l'intersezione con l'asse y.*

L'ellisse ha la forma: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. P è un suo punto generico del primo o secondo quadrante:




Applicando la formula di sdoppiamento, la tangente t in P all'ellisse ha equazione:

$t\colon\ ax+4by=4$

Il punto Q ha ascissa x=0 e ordinata $y=\frac{1}{b}$ (con b>0; se b=0 Q non esiste).

### 2)

*Si determini l'equazione cartesiana del luogo geometrico* $\Omega$ *descritto dal punto medio M del segmento PQ al variare di P.*

Il punto medio M di PQ ha coordinate: $M=\left(\frac{a}{2};\frac{b+\frac{1}{b}}{2}\right)=\left(\frac{a}{2};\frac{b^2+1}{2b}\right)$.

Il luogo descritto da M ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b^2+1}{2b} \\ a^2+4b^2=4 \end{cases};\quad \begin{cases} a=2x \\ \dots \\ 4x^2+4b^2=4;\ \ b^2=1-x^2 \end{cases};\quad \begin{cases} a=2x \\ y=\frac{1-x^2+1}{2b} \\ \dots \end{cases};\quad \begin{cases} a=2x \\ b=\frac{2-x^2}{2y} \\ a^2+4b^2=4 \end{cases}$$ ; quindi:

$$a^2+4b^2=4 \quad \Rightarrow \quad (2x)^2+4\left(\frac{2-x^2}{2y}\right)^2=4\,; \quad 4x^2y^2+(2-x^2)^2=4\,y^2;$$

$$4x^2y^2+(2-x^2)^2=4y^2; \quad 4y^2(1-x^2)=\ (2-x^2)^2\ ; \quad y^2=\frac{(2-x^2)^2}{4(1-x^2)}$$

Osserviamo che $y=\frac{b^2+1}{2b}>0$ essendo b>0 e che, essendo $-2<a<2$ ed $a=2x$ è: $-2<2x<2, \quad -1<x<1:\ quindi\ \ 1-x^2>0$. Inoltre, essendo $2-x^2>0$ se $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, per $-1<x<1$ si ha $2-x^2>0$ . Pertanto:

$$y^2=\frac{(2-x^2)^2}{4(1-x^2)}, \quad y=\sqrt{\frac{(2-x^2)^2}{4(1-x^2)}}=\frac{2-x^2}{2\sqrt{1-x^2}}:\ luogo\ \ \Omega \quad descritto\ da\ M.$$

***3)***

*Si studi e si rappresenti $\Omega$ avendo trovato che la sua equazione è: $y=\frac{(2-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$.*

La funzione è definita per $-1<x<1$ ed è pari, essendo $f(-x)=f(x)$, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Come detto nel punto precedente il numeratore è positivo, quindi la funzione è positiva.

Il limiti per x che tende ad 1 da sinistra e a -1 da destra sono uguali a più infinito, quindi abbiamo gli asintoti verticali x=1 e x=-1.

**Derivata prima:**

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{-2x\sqrt{1-x^2}-(2-x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right]=\frac{-2x(1-x^2)+x(2-x^2)}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^3}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

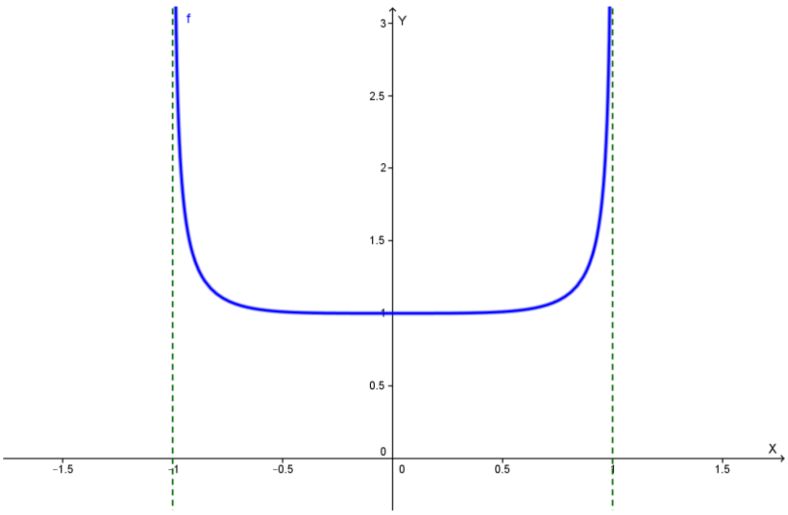
Siccome il denominatore è positivo nel dominio della funzione, risulta:

$y'>0$ se 0$<x<1$: funzione crescente
$y'<0$ se $-1<x<0$: funzione decrescente
Pertanto x=0 è punto di minimo, relativo e assoluto, con ordinata y=1.

**Derivata seconda:**

$\boldsymbol{y''}=\cdots=\frac{3x^2}{2(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}>0$ per ogni x diverso da zero: quindi il grafico volge sempre la concavità verso l'alto (non ci sono flessi).

Il grafico della funzione è il seguente:




Con la collaborazione di Angela Santamaria