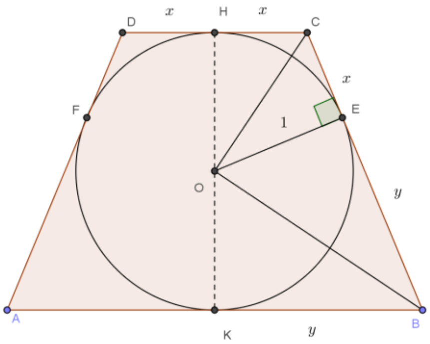
# Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – PROBLEMA 2

*Il trapezio ABCD è isoscele e circoscritto ad un cerchio di raggio 1. Si ponga la base minore CD=2x.*

## 1)

*Si provi che è:* $AB = \frac{2}{x}$.



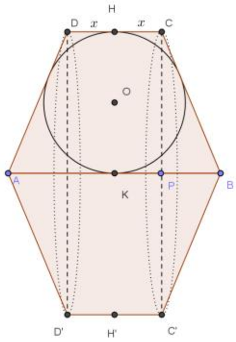

Il triangolo BCO è rettangolo in O, essendo gli angoli DCB e ABC supplementari, quindi gli angoli OCE ed EBO (metà dei precedenti) sono complementari.
Per il secondo teorema di Euclide risulta: $OE^2 = CE \cdot BE;\ \ BE = \frac{OE^2}{CE} = \frac{1}{x}$. Quindi:

$$BO^2 = OE^2 + BE^2 = 1 + \frac{1}{x^2}\ \ ;\ \ quindi:\ BK^2 = OB^2 - OK^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{x^2};\ \ BK = \frac{1}{x}$$

Pertanto: $AB = 2BK = \frac{2}{x}\quad c.v.d.$

## 2)

*Si dimostri che il volume del solido, ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore, assume il valore minimo per* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Il solido generato è un cilindro con sovrapposti due coni uguali.

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi PC^2 \cdot CD = \pi(4)(2x) = 8\pi x$$
$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi PC^2 \cdot PB = \frac{1}{3}\pi\,(4)(BK - x) = \frac{1}{3}\pi\,(4)\left(\frac{1}{x} - x\right) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{x} - x\right)$$

Quindi:

$$V(solido) = 8\pi x + 2\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{x} - x\right)\right) = 8\pi x + \frac{8}{3}\pi\left(\frac{1}{x} - x\right) = \frac{8}{3}\pi\left[3x + \frac{1}{x} - x\right] = \frac{8}{3}\pi\left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

Tale volume è massimo se lo è la funzione:
Tale volume è massimo se lo è la funzione:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\,, \quad con \;\; 0 < x \le 1$$

**Metodo delle derivate:**

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \ge 0 \quad se \quad 2x^2 - 1 \ge 0\colon \;\; x \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; vel \;\; x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi la funzione è decrescente se $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e crescente se $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$; essa è quindi minima se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: il volume è minimo se $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

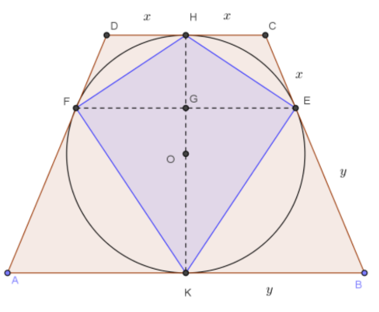
**Metodo elementare:**

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\,, \quad con \;\; 0 < x \le 1$$

Siccome $2x \cdot \frac{1}{x} = 2 = costante$, la somma $2x + \frac{1}{x}$ è minima quando le due quantità (positive) sono uguali, cioè quando: $2x = \frac{1}{x}$ da cui $x^2 = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ come già visto.

***3)***

*In corrispondenza di tale valore di x, si calcoli l'area del quadrilatero avente per vertici i quattro punti in cui il trapezio è tangente al cerchio.*




Per il teorema di Talete si ha: $HG : GK = x : y = \frac{x}{\frac{1}{x}} = x^2$

Quindi: $HG = 2 - GK = x^2 \cdot GK$; $\quad GK = \frac{2}{1+x^2}$

$$HG = 2 - GK = 2 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

Per il secondo teorema di Euclide risulta poi:

$$GE = \sqrt{HG \cdot GK} = \sqrt{\frac{2x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2}{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

Quindi: $A(EHFK) = \frac{EF \cdot HK}{2} = \frac{2EG \cdot 2}{2} = 2 \cdot EG = \frac{4x}{1+x^2} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\; u^2 = Area(EHFK)$

Con la collaborazione di Angela Santamaria