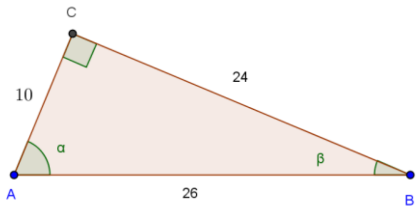
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2008 – Quesiti

QUESITO 1

Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

La terna 10, 12, 26 è pitagorica: $26^2 = 676 = 10^2 + 24^2 = 676$, quindi il triangolo è rettangolo con ipotenusa di 26 cm (un angolo è quindi di 90°).



Risulta quindi: $sen(\alpha) = \frac{24}{26}$, $\alpha = arcsen\left(\frac{24}{16}\right) \cong 67.380° \cong 67° + (0.380 \cdot 60)' \cong 67°23'$

$$\beta = 90° - 67°23' = 22°37'$$

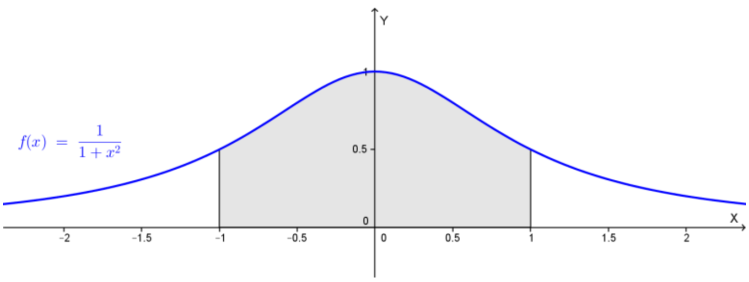
QUESITO 2

Si calcoli e si interpreti geometricamente l'integrale definito: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Risulta:

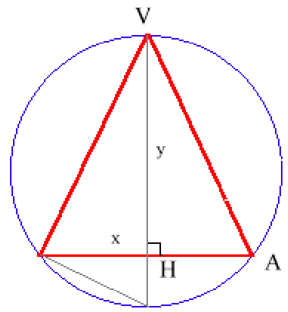
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [arctg(x)]_{-1}^{1} = arctg(1) - arctg(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

L'integrale dato rappresenta l'area della regione piana compresa fra il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, l'asse x e le rette x=1 e x=-1:



QUESITO 3

La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.



Indichiamo con y l'altezza del cono e con x il suo raggio di base. Per il secondo teorema di Euclide si ha: $x^2 = y(120-y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(120-y)$

Risoluzione elementare.

$y^2(120-y) = (y)^2(120-y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (120); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$\frac{y}{2} = \frac{120-y}{1}, \quad y = 80 \ \ (altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \ \frac{4}{3}\ \ del\ raggio\ della\ sfera)$

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera (nel nostro caso altezza=80 cm).

Risoluzione analitica.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(120-y), \quad con\ 0 \le y \le 120$
Risulta:

$$z' = 240y - 3y^2 \ge 0 \quad se \quad y^2 - 80y \le 0: \ \ 0 \le y \le 80$$

La funzione è quindi crescente se $0 < y < 80$ e decrescente se $80 < y < 120$.

Per $y = 80$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.
Calcoliamo il volume massimo. Da $x^2 = y(120-y)$ otteniamo: $x^2 = 80(40) = 3200$

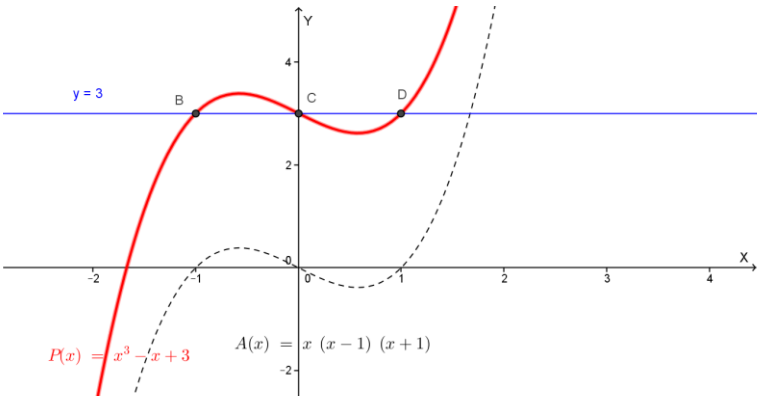
Il volume massimo è quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi(3200)(80) = \frac{256000\,\pi}{3}\ cm^3 = \frac{256\,\pi}{3}\ dm^3 \cong 268.083\ litri$$

QUESITO 4

Si dia un esempio, almeno, di polinomio P(x) il cui grafico tagli la retta $y = 3$ in 3 punti distinti.

Partiamo dal polinomio $A(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ che taglia l'asse x nei punti di ascissa 0, 1 e -1. Se trasliamo verso l'alto di 3 unità il grafico di questo polinomio otteniamo il polinomio $P(x) = x^3 - x + 3$ che taglia la retta $y = 3$ in tre punti distinti.
Il grafico è il seguente:



Con lo stesso criterio possiamo costruire altri esempi: $P(x) = (x-1)(x+2)(x+3) + 3$

QUESITO 5

Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari?

Dobbiamo utilizzare le cifre 1, 3, 5, 7, 9. I numeri di quattro cifre distinte che possiamo scrivere utilizzando le cinque cifre dispari sono dati dal numero delle disposizioni semplici di 5 oggetti a 4 a 4, quindi:

$$D_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

QUESITO 6

Si determinino le costanti a, b, c in modo che le curve di equazioni

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad e \qquad g(x) = x^3 + c$$

siano tangenti nel punto A(1, 0). Si determini l'equazione della tangente comune.

Deve essere:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ g(1) = 0 \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 1 + c = 0 \\ (2x + a)_{x=1} = (3x^2)_{x=1} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ c = -1 \\ 2 + a = 3; \ \ a = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = -2 \\ c = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

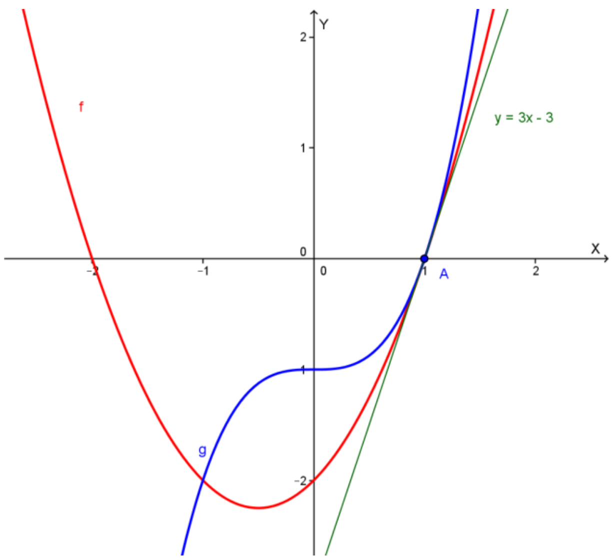
Le due funzioni sono quindi:

$$f(x) = x^2 + x - 2 \qquad e \qquad g(x) = x^3 - 1$$

Il coefficiente angolare della tangente in A=(1,0) a g è m=3; la tangente comune ha quindi equazione:

$$y - 0 = 3(x - 1); \quad y = 3x - 3$$

La situazione grafica è la seguente:



QUESITO 7

Il cono W e il cilindro T, circolari retti, hanno uguale raggio r di base e uguale altezza h. Si calcoli il limite del rapporto delle rispettive superfici totali al tendere di r a zero.

$V(W) = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,, \qquad V(T) = \pi r^2 h$

$S_t(W) = \pi r a + \pi r^2 = \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2}\right) + \pi r^2$

$S_t(T) = 2\pi r h + 2\pi r^2$

Quindi:

$$\lim_{r\to 0}\frac{S_t(W)}{S_t(T)} = \lim_{r\to 0}\frac{\pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}\right)+\pi r^2}{2\pi r h + 2\pi r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{\left(\sqrt{h^2+r^2}\right)+r}{2h+2r} = \lim_{r\to 0}\frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$$

QUESITO 8

Si provi che le espressioni $y = 2sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ *e* $y = \sqrt{3}senx + cosx$ *definiscono la stessa funzione f . Di f si precisi: dominio, codominio e periodo.*

$y = \sqrt{3}senx + cosx = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}senx + \frac{1}{2}cosx\right) = 2sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ *c.v.d.*

Oppure, partendo dalla prima funzione:

$y = 2sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(senx\cos\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{6}cosx\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}senx + \frac{1}{2}cosx\right) = \sqrt{3}senx + cosx$

Osserviamo che in generale la funzione lineare in seno e coseno:

$$y = asenx + bcosx$$

si può trasformare in

$$y = \sqrt{a^2+b^2}\,sen(x+\alpha), \quad con \quad tg\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria