Scuole italiane all'estero (Europa) 2008 – PROBLEMA 1

La circonferenza γ passa per B(0,-4) ed è tangente in O(0, 0) alla retta di coefficiente angolare –4; la parabola λ passa per A(4,0) ed è tangente in O a γ.

1)

Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.

La retta per O con coefficiente angolare -4 ha equazione: $y = -4x$. Il centro della circonferenza appartiene alla perpendicolare in O alla tangente ed all'asse del segmento OB. La perpendicolare in O alla tangente ha equazione: $y = \frac{1}{4}x$.
L'asse di OB ha equazione: $y = -2$.
Il centro C della circonferenza si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x \\ y = -2 \end{cases} ; \quad C = (-8; -2)$$

Il raggio R della circonferenza è uguale ad OC: $R^2 = 64 + 4 = 70$.

La circonferenza γ ha quindi equazione:

$$(x+8)^2 + (y+2)^2 = 70, \quad x^2 + y^2 + 16x + 4y = 0$$

La parabola λ passa per A(4; 0) ed essendo tangente alla circonferenza è tangente in O alla retta $y = -4x$.

La parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con c=0; imponiamo il passaggio per A:

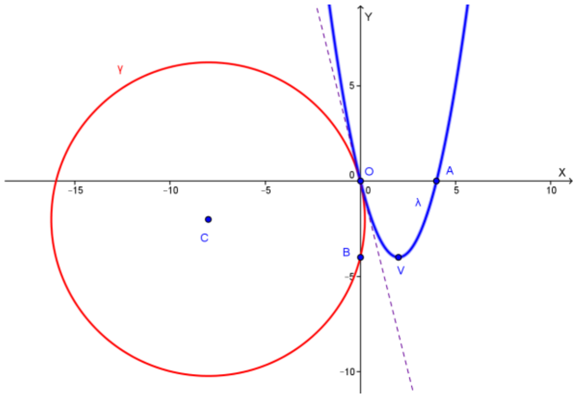
$$0 = 16a + 4b, \quad b = -4a: \quad y = ax^2 - 4ax.$$

Il coefficiente angolare della tangente nel punto $(x_0; y_0)$ è dato da: $2ax_0 + b$. La tangente in O ha coefficiente angolare -4, quindi: $b = -4a = -4, \; a = 1$. Quindi:

$$\lambda: \; y = x^2 - 4x.$$

La parabola ha vertice (2;-4) e passa per O ed A.

Le due curve hanno i seguenti grafici:



2)

Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi sessagesimali.

Per il teorema della corda, detto β l'angolo del secondo o terzo quadrante sotto cui è visto il segmento OB, abbiamo:

$AB = 2Rsen(\beta),\ \ sen(\beta) = \frac{AB}{2R} = \frac{4}{2\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{70} = \frac{\sqrt{70}}{35}$, $\quad \beta = arcsen\left(\frac{\sqrt{70}}{35}\right) \cong 13.830°$

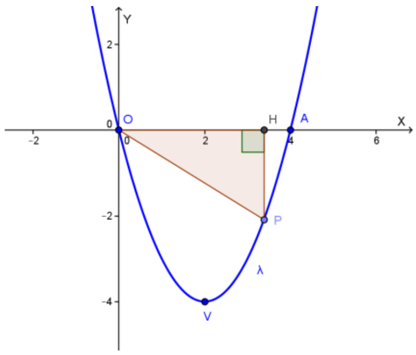
Quindi: $\beta \cong 13.830° = 13° + (0.830 \cdot 60)' = 13° + 49.8' \cong 13°50' = \beta$

L'angolo α è il supplementare di β, quindi:

$\alpha = 180° - \beta = 180° - 13°50' = 166°10'$

3)

Se P è un punto dell' arco di λ contenuto nel quarto quadrante e H la sua proiezione sull'asse x, si trovi la posizione di P affinché il triangolo OPH abbia area massima.



Poniamo $P = (x; y) = (x;\ \ x^2 - 4x),\ \ \ con\ \ \ 0 < x < 4$. Risulta:

$Area(OPH) = \frac{1}{2} OH \cdot PH = \frac{1}{2}(x)(|x^2 - 4x|) = \frac{1}{2}x(-x^2 + 4x) = \frac{1}{2}(-x^3 + 4x^2) = y$

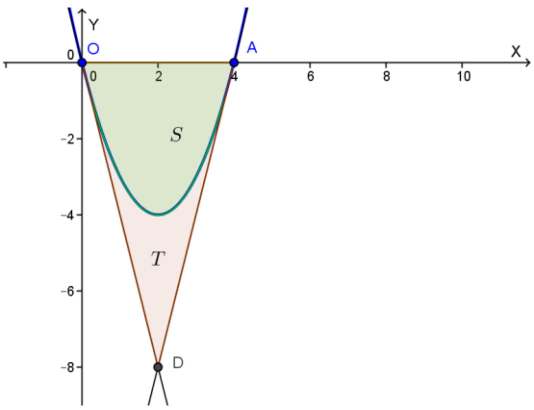
$y' = \frac{1}{2}(-3x^2 + 8x) \geq 0\ \ \ se\ \ \ \ x(3x - 8) \leq 0:\ \ \ \ \ 0 \leq x \leq \frac{8}{3}$

Quindi y cresce per $0 < x < \frac{8}{3}$ e decresce se $\frac{8}{3} < x < 4$; $x = \frac{8}{3}$ è punto di massimo assoluto. Il punto P corrispondente ha coordinate:

$$P = (x;\ \ x^2 - 4x) = \left(\frac{8}{3};\ -\frac{32}{9}\right) = P$$

4)

Si conducano le due rette tangenti a λ nei suoi punti O e A; si calcoli l'area del triangolo mistilineo delimitato dall'arco di parabola appartenente al quarto quadrante e dalle due tangenti.



La tangente in O, come già visto, ha equazione: $y = -4x$. La tangente in A (simmetrica della tangente in O rispetto all'asse della parabola) ha coefficiente angolare 4. Per via diretta:
$A = (4; 0),\ \ y = x^2 - 4x, \qquad y' = 2x - 4,\ \ y'(4) = 4$
La tangente in A ha quindi equazione:
$y = 4(x - 4), \qquad y = 4x - 16$
Per la simmetria suddetta le due tangenti si incontrano sull'asse della parabola (x=2), quindi il punto D di intersezione ha ascissa 2; la sua ordinata è quindi -8: $D = (2;\ -8)$.

L'area del triangolo mistilineo T si può ottenere come differenza fra l'area del triangolo OAD e quella del segmento parabolico S di base OA.

$$Area(OAD) = \frac{1}{2}(4)(8) = 16, \quad Area(S) = \frac{2}{3}(4)(4) = \frac{32}{3} \quad (teorema\ di\ Archimede)$$

Quindi:

$$Area(T) = 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria