SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA) 2008 - PROBLEMA 2

$y' = \dfrac{ax}{(1+4x^2)^2}$: dobbiamo trovare la funzione $y = f(x)$ il cui grafico γ passa per i punti $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ e $(0;2)$.

Risulta: $y = \int y'\,dx = \int \dfrac{ax}{(1+4x^2)^2}\,dx = \dfrac{a}{8}\int 8x(1+4x^2)^{-2}\,dx = \dfrac{a}{8}\left(\dfrac{(1+4x^2)^{-1}}{-1}\right) + k$

Quindi: $y = \dfrac{-a}{8(1+4x^2)} + k$; impongo il passaggio per i due punti:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{-a}{16} + k \\ 2 = \dfrac{-a}{8} + k \end{cases} \Rightarrow \cdots \begin{cases} k = 0 \\ a = -16 \end{cases}$$

Quindi la funzione richiesta è: $y = \dfrac{2}{1+4x^2}$

1)

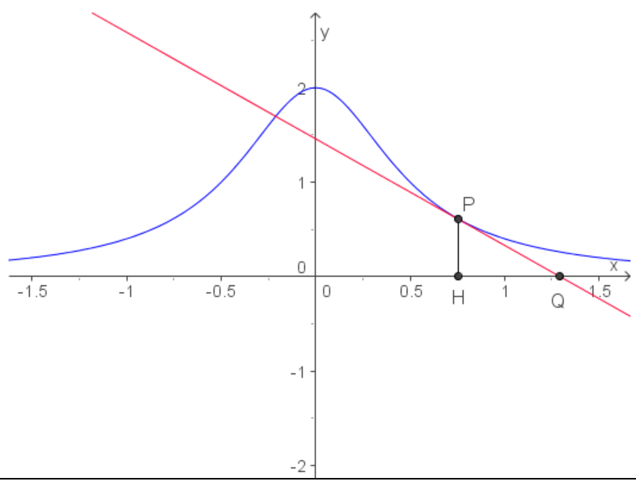
$y = \dfrac{2}{1+4x^2}$. Si tratta di una funzione pari, definita su tutto R, sempre positiva, il cui grafico taglia l'asse delle ordinate nel punto $(0;2)$.

I limiti a + e – infinito sono uguali a 0^+.

Studio della derivata prima: $y' = \dfrac{-16x}{(1+4x^2)^2}$; per $x \le 0$ la funzione è crescente, per $x \ge 0$ decrescente; x=0 è punto di massimo (assoluto).

Studio della derivata seconda: $y'' = \dfrac{16(12x^2-1)}{(1+4x^2)^3}$; la funzione risulta concava verso l'alto quando $12x^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow x \le -\sqrt{\dfrac{1}{12}} \vee x \ge \sqrt{\dfrac{1}{12}}$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{12}}$ punti di flesso (con ordinata 3/2).

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Indichiamo con $P\left(t;\frac{2}{1+4t^2}\right)$ il generico punto di γ. Per l'evidente simmetria, possiamo considerare t>0. La tangente in P ha equazione:

$y-\frac{2}{1+4t^2}=\frac{-16t}{(1+4t^2)^2}(x-t)$; con y = 0 troviamo $x_Q=\frac{12t^2+1}{8t}$. Essendo $x_H=t$ risulta:

$\overline{HQ}=x_Q-x_H=\frac{12t^2+1}{8t}-t=\frac{4t^2+1}{8t}=\frac{t}{2}+\frac{1}{8t}$

Troviamo per quale valore di t tale distanza assume il valore minimo.

PER VIA ELEMENTARE

Essendo $\overline{HQ}=\frac{t}{2}+\frac{1}{8t}$, si osserva che è la somma di due quantità il cui prodotto è costante.

Infatti: $\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{1}{8t}\right)=\frac{1}{16}$: ma se il prodotto di due quantità (positive) è costante la loro somma è minima quando sono uguali; pertanto il minimo richiesto si ha quando $\frac{t}{2}=\frac{1}{8t}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

In conclusione: la lunghezza del segmento HQ è minima quando l'ascissa di P è uguale a $\pm\frac{1}{2}$.

CON LE DERIVATE

Consideriamo la funzione di equazione $y=\frac{t}{2}+\frac{1}{8t}$; la sua derivata è: $y'=\frac{1}{2}-\frac{1}{8t^2}$

Risulta $y'\geq 0\ per\ t\leq -\frac{1}{2}\ \vee t\geq \frac{1}{2}$; avendo considerato $t>0$ la funzione è crescente per $t\geq\frac{1}{2}$ e decrescente per $0<t\leq\frac{1}{2}$, quindi il minimo richiesto si ha per $t=\frac{1}{2}$.

3)

L'area richiesta si ottiene calcolando l'integrale seguente:

$$\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+4x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+4x^2}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k\frac{2}{1+4x^2}dx=\lim_{k\to+\infty}\int_0^k\frac{2}{1+(2x)^2}dx=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left[arctg(2x)\right]_0^k=\lim_{k\to+\infty}arct(2k)=\frac{\pi}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria