

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO (EUROPA) 2008 - PROBLEMA 2

$y' = \frac{ax}{(1+4x^2)^2}$: dobbiamo trovare la funzione $y = f(x)$ il cui grafico γ passa per i punti $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ e $(0; 2)$.

Risulta: $y = \int y' dx = \int \frac{ax}{(1+4x^2)^2} dx = \frac{a}{8} \int 8x(1+4x^2)^{-2} dx = \frac{a}{8} \left(\frac{(1+4x^2)^{-1}}{-1} \right) + k$

Quindi: $y = \frac{-a}{8(1+4x^2)} + k$; impongo il passaggio per i due punti:

$$\begin{cases} 1 = \frac{-a}{16} + k \\ 2 = \frac{-a}{8} + k \end{cases} \Rightarrow \dots \begin{cases} k = 0 \\ a = -16 \end{cases} \quad \text{Quindi la funzione richiesta è: } y = \frac{2}{1+4x^2}$$

1)

$y = \frac{2}{1+4x^2}$. Si tratta di una funzione pari, definita su tutto R, sempre positiva, il cui grafico taglia l'asse delle ordinate nel punto $(0; 2)$.

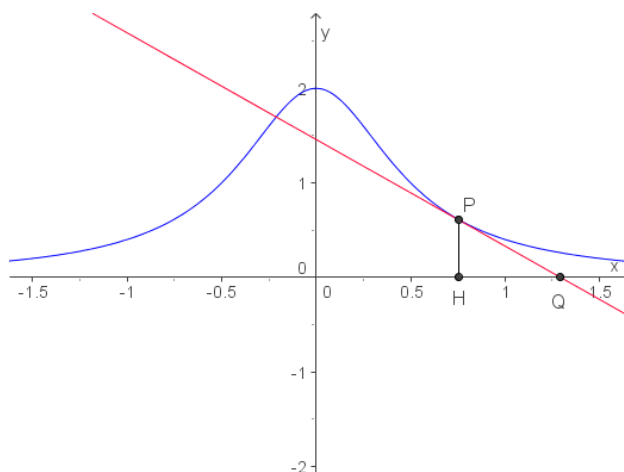
I limiti a + e - infinito sono uguali a 0^+ .

Studio della derivata prima: $y' = \frac{-16x}{(1+4x^2)^2}$; per $x \leq 0$ la funzione è crescente, per $x \geq 0$ decrescente; $x=0$ è punto di massimo (assoluto).

Studio della derivata seconda: $y'' = \frac{16(12x^2 - 1)}{(1+4x^2)^3}$; la funzione risulta concava verso l'alto

quando $12x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{1}{12}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{12}}$; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{12}}$ punti di flesso (con ordinata $3/2$).

Il grafico della funzione è il seguente:



2)

Indichiamo con $P\left(t; \frac{2}{1+4t^2}\right)$ il generico punto di γ . Per l'evidente simmetria, possiamo

considerare $t > 0$. La tangente in P ha equazione:

$$y - \frac{2}{1+4t^2} = \frac{-16t}{(1+4t^2)^2}(x-t); \text{ con } y=0 \text{ troviamo } x_Q = \frac{12t^2+1}{8t}. \text{ Essendo } x_H = t \text{ risulta:}$$

$$\overline{HQ} = x_Q - x_H = \frac{12t^2+1}{8t} - t = \frac{4t^2+1}{8t} = \frac{t}{2} + \frac{1}{8t}$$

Troviamo per quale valore di t tale distanza assume il valore minimo.

PER VIA ELEMENTARE

Essendo $\overline{HQ} = \frac{t}{2} + \frac{1}{8t}$, si osserva che è la somma di due quantità il cui prodotto è costante.

Infatti: $\left(\frac{t}{2}\right)\left(\frac{1}{8t}\right) = \frac{1}{16}$: ma se il prodotto di due quantità (positive) è costante la loro somma è

minima quando sono uguali; pertanto il minimo richiesto si ha quando $\frac{t}{2} = \frac{1}{8t} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

In conclusione: la lunghezza del segmento HQ è minima quando l'ascissa di P è uguale a $\pm \frac{1}{2}$.

CON LE DERIVATE

Consideriamo la funzione di equazione $y = \frac{t}{2} + \frac{1}{8t}$; la sua derivata è: $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{8t^2}$

Risulta $y' \geq 0$ per $t \leq -\frac{1}{2} \vee t \geq \frac{1}{2}$; avendo considerato $t > 0$ la funzione è crescente per $t \geq \frac{1}{2}$ e

decrescente per $0 < t \leq \frac{1}{2}$, quindi il minimo richiesto si ha per $t = \frac{1}{2}$.

3)

L'area richiesta si ottiene calcolando l'integrale seguente:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+4x^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+4x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{2}{1+4x^2} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{2}{1+(2x)^2} dx = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} [\arctg(2x)]_0^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \arct(2k) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$