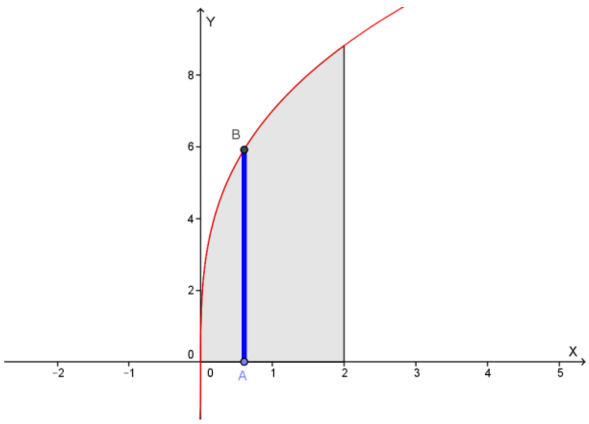
Scuole italiane all'estero (Europa) 2008 – Quesiti

QUESITO 1

La regione R delimitata dal grafico di $y = 7\sqrt[3]{x}$*, dall'asse x e dalla retta x=2 è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte dei quadrati. Si calcoli il volume di S.*

Rappresentiamo la regione R:



La sezione quadrata ha per lato $AB = f(x) = 7\sqrt[3]{x}$, e la sua area A(x) è quindi $f^2(x) = 49\sqrt[3]{x^2} = 49 \cdot x^{\frac{2}{3}}$.

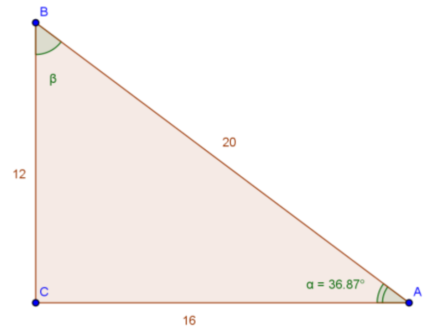
Il volume V(S) è quindi dato da:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_0^2 49 \cdot x^{\frac{2}{3}}dx = 49\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^2 = \frac{147}{5}\left(2^{\frac{5}{3}}\right) = \frac{294}{5}\sqrt[3]{4}\, u^3 \cong 93.339\, u^3 = V$$

QUESITO 2

Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

Osserviamo che le misure dei lati del triangolo formano una terna pitagorica (si ottengono da 3, 4 e 5 moltiplicando per 4): il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa di 20 cm.



Risulta quindi:

$$sen\ \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \quad \alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right) \cong 36.87° = 36° + (0.87 \cdot 60)' \cong 36°52' = \alpha$$

L'altro angolo acuto è:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 36°52' = 53°08' = \beta$$

QUESITO 3

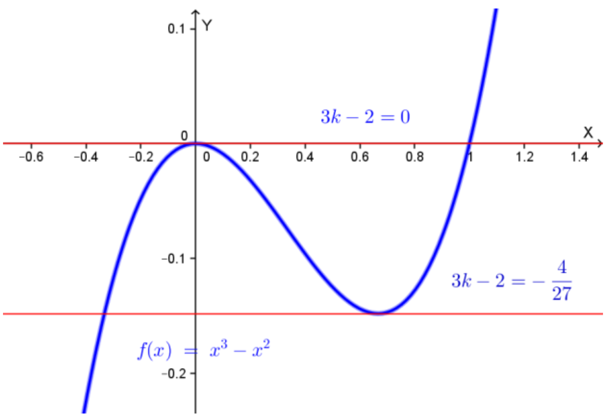
Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - 3k + 2 = 0$$

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma: $x^3 - x^2 = 3k - 2$
Studiamo qualitativamente la funzione $f(x) = x^3 - x^2$.
Si tratta di una cubica che tende a più o meno infinito per x che tende a più o meno infinito. Ai fini del nostro quesito serve trovare il massimo ed il minimo relativi:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \quad se \quad x = 0 \quad vel \quad x = \frac{2}{3}$$

Risulta: $f(0) = 0 \quad ed \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$
Si ha la seguente situazione grafica:



La retta per il massimo si ha quando:

$$3k - 2 = 0, \qquad k = \frac{2}{3}$$

La retta per il minimo si ha quando:

$$3k - 2 = -\frac{4}{27}, \qquad k = \frac{50}{81}$$

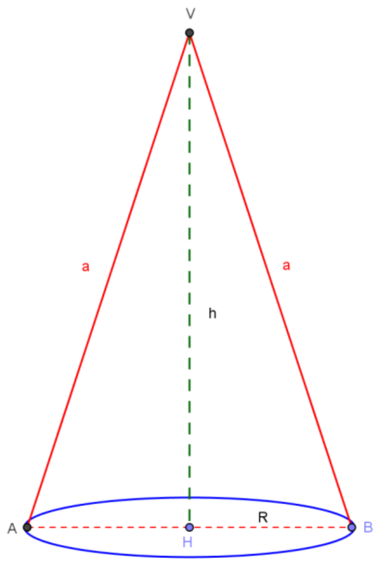
L'equazione ha quindi:

1 soluzione se $k > \frac{2}{3} \ vel \ k < \frac{50}{81}$

3 soluzioni se $\frac{50}{81} \le k \le \frac{2}{3}$ (di cui due coincidenti per $k = \frac{2}{3} \ e \ k = \frac{50}{81}$).

QUESITO 4

La capacità di una damigiana di vino è pari a quella del massimo cono circolare retto di apotema 50 cm. Si dica quanti litri di vino la damigiana può contenere.



Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Risulta: $R^2 = a^2 - h^2$, quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - h^2)h$$

Il volume è massimo se lo è $y = h(a^2 - h^2) = f(h)$ con $0 \leq h \leq a$.

Metodo elementare.

$h(a^2 - h^2) = (h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2 - h^2)$ è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (a^2), quindi è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{h^2}{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 - h^2}{1}, \quad 2h^2 = a^2 - h^2, \qquad h^2 = \frac{1}{3}a^2, \qquad h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 50\frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Per tale valore di h si ha: $R^2 = a^2 - h^2 = 50^2 - \frac{2500}{3} = \frac{5000}{3}\ cm.$

Il volume massimo è quindi:

$$V(massimo) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5000}{3}\right) \cdot 50\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{250000\,\pi\,\sqrt{3}}{27}\ cm^3 \cong 50383\ cm^3 \cong 50.4\ dm^3 = 50.4\ l$$

Metodo analitico.

Dobbiamo trovare il massimo della $f(h) = h(a^2 - h^2)$ con $0 \leq h \leq a$. Risulta:

$$f' = a^2 - h^2 + h(-2h) = a^2 - 3h^2 \geq 0 \quad se \quad -a\frac{\sqrt{3}}{3} \leq h \leq a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f è quindi crescente per $0 \leq h < a\frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente per $a\frac{\sqrt{3}}{3} < h < a$: è quindi massima per $h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 50\frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$, come trovato precedentemente.

QUESITO 5

Si dimostri che l'equazione $x^7 + 5x + 5 = 0$ *ha una sola radice reale.*

Consideriamo la funzione $f(x) = x^7 + 5x + 5$. Si tratta di una funzione razionale intera di grado dispari, quindi ammette almeno uno zero. Analizziamo la derivata prima:

$$f'(x) = 7x^6 + 5 > 0 \ \ per\ ogni\ x$$

La funzione è quindi strettamente crescente in tutto il suo dominio, quindi si annulla una sola volta. Ciò equivale a dire che *l'equazione* $x^7 + 5x + 5 = 0$ *ha una sola radice reale.*

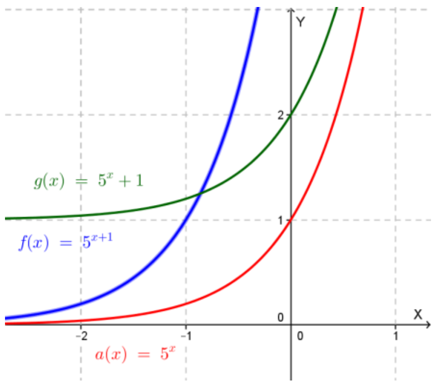
QUESITO 6

Si traccino i grafici delle seguenti funzioni di R in R:

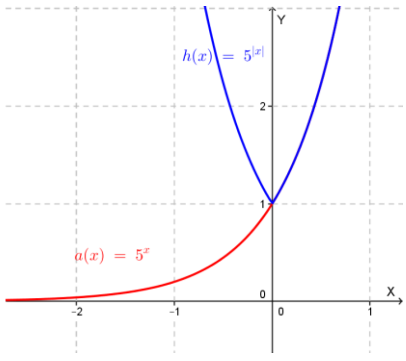
$$f: x \to 5^{x+1}\ ; \quad g: x \to 5^x + 1\ ; \quad h:\ x \to 5^{|x|}\ ; \quad k: x \to 5^{-x}$$

Tutti i grafici richiesti sono deducibili dal grafico della funzione $y = a(x) = 5^x$.

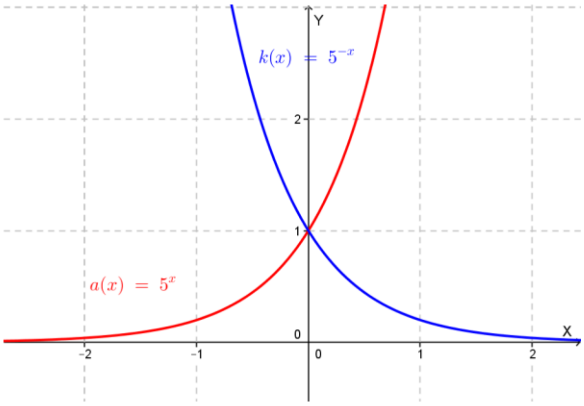
$f(x) = 5^{x+1} = a(x+1)$: si trasla verso sinistra di 1 il grafico di a(x)
$g(x) = 5^x + 1 = a(x) + 1$: si trasla verso l'alto di 1 il grafico di a(x)



$h(x) = 5^{|x|} = a(|x|)$: si conferma il grafico di a(x) che si trova a destra dell'asse y e lo si ribalta rispetto all'asse y.



$k(x) = 5^{-x} = a(-x)$: si ribalta il grafico di a(x) rispetto all'asse y.



QUESITO 7

Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$*? Esiste un k tale che* $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$*?*

Il simbolo $\binom{n}{k}$ indica le combinazioni di n oggetti a k a k, con n numero naturale non nullo e ka numero naturale non superiore ad n. Risulta:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

$\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$ se k=k-2: impossibile, oppure, essendo $\binom{10}{k} = \binom{10}{10-k}$ se 10-k=k-2, k=6.

Quindi $\binom{10}{k} = \binom{10}{k-2}$ se $k = 6$.

QUESITO 8

Dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica. Cioè che $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ *.*

Detti a e b due numeri positivi, abbiamo:

$$media\ aritmetica = m_A = \frac{a+b}{2} \quad , \quad media\ geometrica = m_G = \sqrt{ab}$$

Dobbiamo dimostrare che $m_G \leq m_A$, cioè che: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2$: vero per ogni a e b.

Osserviamo che due medie sono uguali quando i due numeri sono uguali; infatti, se a=b:

$$\frac{a+b}{2} = a \ , \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$$

N.B.

Il risultato vale anche per n numeri:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria