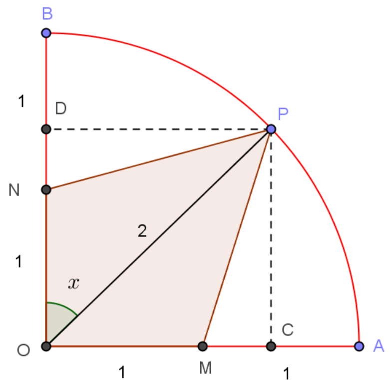
ORDINAMENTO 2008 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.



1)

Si esprima in funzione di $t = tg\frac{x}{2}$ $(con\ x = B\hat{O}P)$ *l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.*

L'angolo x ha le seguenti limitazioni: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Risulta: $PC = OP \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\, cosx$, $PD = 2senx$. Quindi:

$$Area(OMPN) = A(OMP) + A(ONP) = \frac{OM \cdot PC}{2} + \frac{ON \cdot PD}{2} = \frac{1 \cdot 2cosx}{2} + \frac{1 \cdot 2senx}{2} =$$
$$= cosx + senx.$$

Con $t = tg\frac{x}{2}$ si ha:

$$Area(OMPN) = cosx + senx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1} = f(t)$$

2)

Si studi la funzione $f(t)$ *così ottenuta e si tracci il suo grafico* γ*, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.*

$$y = f(t) = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1}$$

Dominio: $-\infty < t < +\infty$

Simmetrie notevoli:

Essendo $f(-t) = \frac{-t^2-2t+1}{t^2+1}$ diverso sia da $f(t)$ che da $-f(t)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $t = 0$, $y = 1$.
Se $y = 0$, $-t^2 + 2t + 1 = 0$, $t = 1 - \sqrt{2} \cong -0.4$, $t = 1 + \sqrt{2} \cong 2.4$

Segno della funzione:

$y > 0 \;\; se \;\; -t^2 + 2t + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2}$

Limiti:

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{-t^2 + 2t + 1}{t^2 + 1} = -1 \quad : \qquad y = -1 \;\; asintoto\ orizzontale$$

Non ci sono asintoti verticali né obliqui.

Eventuali intersezioni con l'asintoto orizzontale:

$\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1} = -1 \quad -t^2 + 2t + 1 = -t^2 - 1 \quad t = -1$: B=(-1;-1)

Derivata prima:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-t^2 + 2\,t + 1}{t^2 + 1}\right) = -\frac{2\left(t^2 + 2\,t - 1\right)}{\left(t^2 + 1\right)^2}$$

$f'(t) \geq 0$ se $t^2 + 2t - 1 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{2} - 1 \leq t \leq \sqrt{2} - 1$

Pertanto la funzione è crescente se $-\sqrt{2} - 1 < t < \sqrt{2} - 1$ e decrescente se

$t < -\sqrt{2} - 1$ oppure $t > \sqrt{2} - 1$

$t = \sqrt{2} - 1$ punto di massimo relativo (e assoluto), $f(\sqrt{2} - 1) \cong 1.4$
$t = -1 - \sqrt{2}$ punto di minimo relativo (e assoluto), $f\left(-1 - \sqrt{2}\right) \cong -1.4$

Derivata seconda:

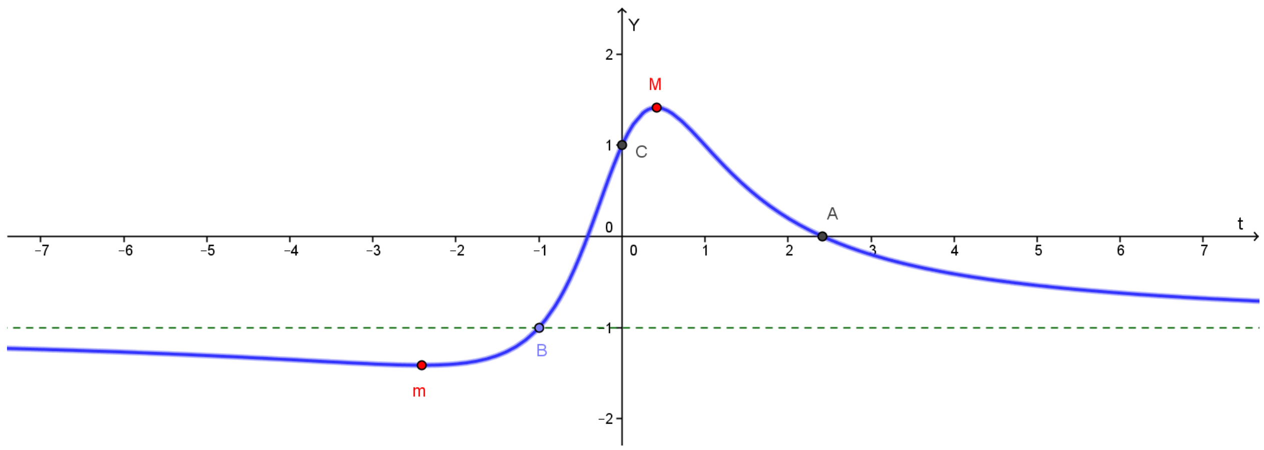
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{-t^2 + 2\,t + 1}{t^2 + 1}\right) = \frac{4\left(t^3 + 3\,t^2 - 3\,t - 1\right)}{\left(t^2 + 1\right)^3}$$

$f''(t) \geq 0$ se $t^3 + 3t^2 - 3t - 1 \geq 0,\ t^3 - 1 + 3t^2 - 3t \geq 0\ ,\ (t-1)(t^2+4t+1) \geq 0$

$t \geq 1\,,\quad -2-\sqrt{3} \leq t \leq -2+\sqrt{3}$: in tali intervalli il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto. Abbiamo tre punti di flesso:

$t = 1\ ,\ f(1) = 1$
$t = -2-\sqrt{3}\ ,\ f\left(-2-\sqrt{3}\right) \cong -1.37$
$t = -2+\sqrt{3}\ ,\ f\left(-2+\sqrt{3}\right) \cong +0.37$

Il grafico della funzione è il seguente:



3)

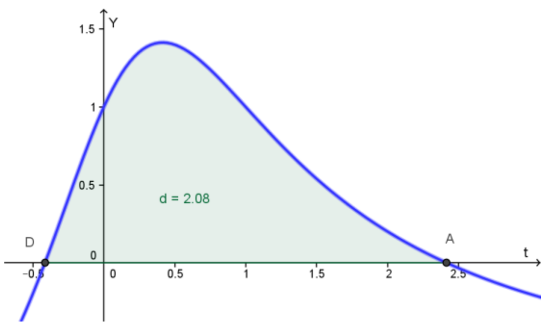
Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.

Il quadrilatero assume il valore massimo se $t = \sqrt{2} - 1$; quindi: $tg\frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$ da cui:

$\frac{x}{2} = 22.5° = \frac{\pi}{8} \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4}$.

4)

Si *calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.*



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale.

$$Area = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(t)dt = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}\,dt = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{-t^2-1+2t+2}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{-t^2-1}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) dt = \left[-t + \ln(1+t^2) + 2arctg(t)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} =$$

$$= -1-\sqrt{2} + \ln\left(4+2\sqrt{2}\right) + 2arctg\left(1+\sqrt{2}\right) - \left[-1+\sqrt{2} + ln\left(4-2\sqrt{2}\right) + 2arctg\left(1-\sqrt{2}\right)\right] =$$

$$= -2\sqrt{2} + \ln\left(4+2\sqrt{2}\right) - ln\left(4-2\sqrt{2}\right) + 2arctg\left(1+\sqrt{2}\right) - 2arctg\left(1-\sqrt{2}\right) =$$

$$= -2\sqrt{2} + \ln\left(4+2\sqrt{2}\right) - ln\left(4-2\sqrt{2}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\pi\right) - 2\left(-\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= -2\sqrt{2} + \ln\left(4+2\sqrt{2}\right) - ln\left(4-2\sqrt{2}\right) + \pi = -2\sqrt{2} + ln\frac{4+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} + \pi =$$

$$= -2\sqrt{2} + ln\left(2\sqrt{2}+3\right) + \pi \cong 2.08\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri