ORDINAMENTO 2008 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = senx(2cosx + 1)$$

1)

Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi, 0)$.

Cerchiamo la più generale primitiva:

$$\int senx(2cosx + 1)\, dx = \int (2senxcosx + senx)dx = 2\int senxcosx\, dx + \int senx\, dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{sen^2x}{2} - cosx + k = sen^2x - cosx + k$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo:

$0 = sen^2\pi - cos\pi + k = 1 + k \quad \Longrightarrow \quad k = -1$. La primitiva richiesta è quindi:

$y = f(x) = sen^2x - cosx - 1$

2)

Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.

$y = f(x) = sen^2x - cosx - 1 = -\cos^2 x - cosx \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Dominio: $0 \leq x \leq 2\pi$

Simmetrie notevoli:

Visto l'intervallo di studio, non si pone il problema se la funzione è pari o dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x= 0 , $y = -2$.
Se $y = 0$, $-\cos^2 x - cosx = 0 \quad , \quad cosx(cosx + 1) = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3}{2}\pi\ ,\ x = \pi$

Segno della funzione:

$y > 0 \quad se \;\; cosx(cosx+1) < 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 < cosx < 0 \quad \Longrightarrow \; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \;, \quad con\, x \neq \pi$

Limiti:

La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.

Derivata prima:

$f'(x) = 2senxcosx + senx \geq 0, \qquad senx(2cosx+1) > 0 \;\; \Longrightarrow \;\; 0 < x < \frac{2}{3}\pi \;\; or \;\; \pi < x < \frac{4}{3}\pi$

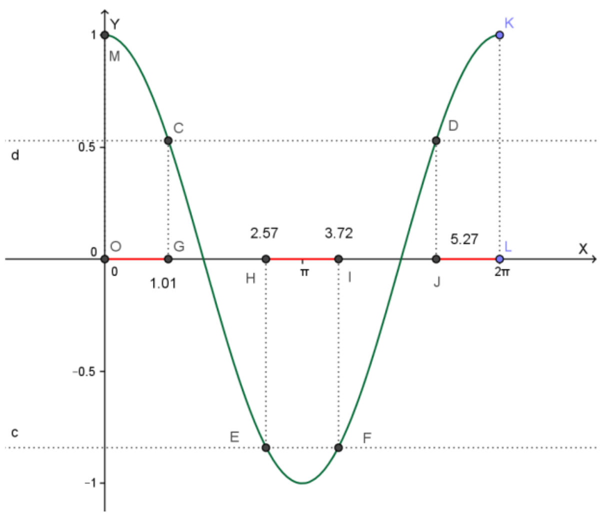
In tali intervalli la funzione è crescente.

$x = \frac{2}{3}\pi$ punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata: $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}$
$x = \frac{4}{3}\pi$ punto di massimo relativo (e assoluto), con ordinata: $f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}$
$x = \pi$ punto di minimo relativo, con ordinata: $f(\pi) = 0$

Derivata seconda:

$f''(x) = 2\cos^2 x - 2sen^2x + cosx = 4\cos^2 x + cosx - 2 \geq 0$ se:

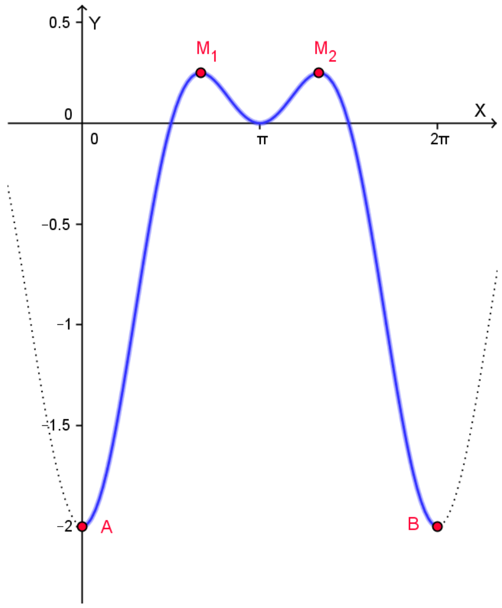
$cosx \leq \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \cong -0.84 \quad oppure \quad cosx \geq \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \cong 0.53$



Quindi $f''(x) \geq 0 \;\; se \quad 0 \leq x \leq 1.01, \;\; 2.57 \leq x \leq 3.72\,, \quad 5.27 \leq x \leq 2\pi$

in tali intervalli il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto. Abbiamo 4 punti di flesso: $x = 1.01, \quad x = 2.57, \quad x = 3.72\,, \quad x = 5.27$

Il grafico della funzione è il seguente:



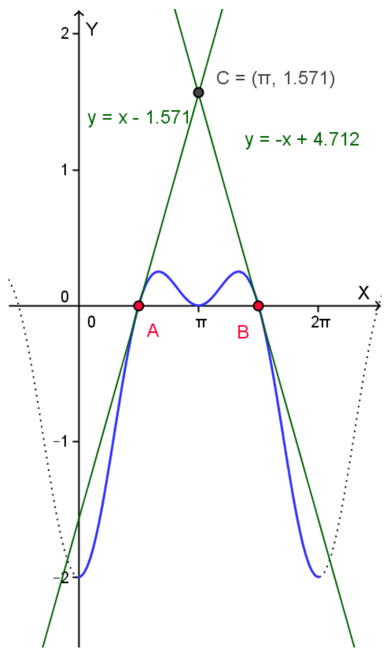
Dimostriamo che la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$. Dovrà essere:

$f(2\pi - x) = f(x)$. Ed infatti risulta:

$f(2\pi - x) = -\cos^2(2\pi - x) - \cos(2\pi - x) = -\cos^2 x - cosx = f(x)$

3)

Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\pi/2$ e $3\pi/2$ e si determini il loro punto d'intersezione C.



$$A = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right) \ , \quad B = \left(\frac{3}{2}\pi; 0\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

Tangente in A: $y = x - \frac{\pi}{2}$

Tangente in B: $y = -x + \frac{3}{2}\pi$

Intersezione C fra le tangenti:

$$x - \frac{\pi}{2} = -x + \frac{3}{2}\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \pi$$

$$C = \left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$$

4)

Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

Essendo la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$ l'area richiesta S è il doppio dell'area S_1 compresa tra la tangente in A e la curva nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-(-\cos^2 x - cosx)\right] dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}+\cos^2 x + cosx\right)\, dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{1+cos2x}{2}+cosx\right)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x+cosx\right)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{1}{4}sen2x+senx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\pi-\left(\frac{\pi^2}{8}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}-1 =$$

$= \left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}-1\right)\, u^2$. Quindi l'area richiesta è:

$$S = 2\cdot S_1 = 2\left(\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}-1\right)\, u^2\right) = \left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-2\right)\, u^2 \cong 2.04\ u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri