ORDINAMENTO 2008 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

Si determini la distanza delle due rette parallele:

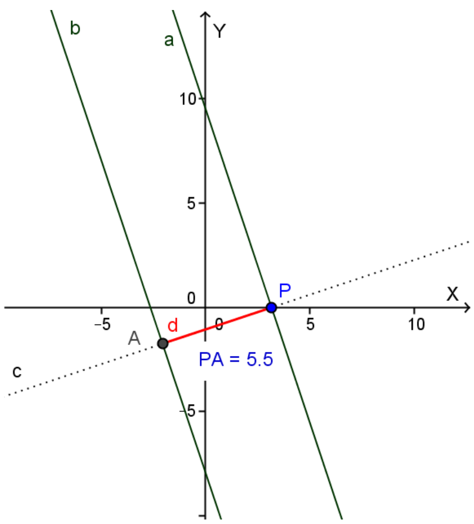
$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0\,, \qquad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$$

La distanza richiesta è data dalla distanza di un punto di una delle due rette dall'altra retta.

Scegliamo sulla prima retta il punto $P = (\sqrt{10}; 0)$. La distanza di P dalla seconda retta è data da:

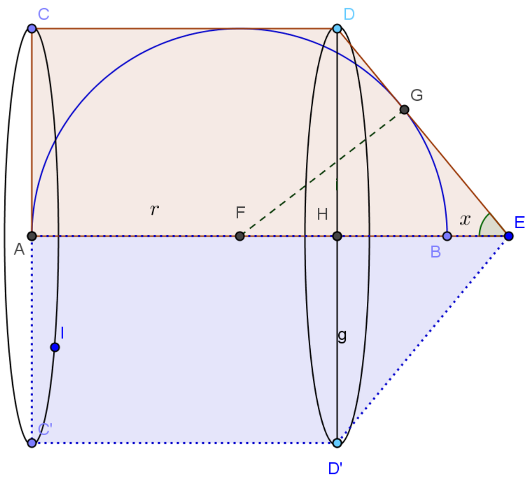
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6\sqrt{10} + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{11}{2}$$

La distanza tra due rette è dunque uguale a $\frac{11}{2}$.



QUESITO 2

Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.



Il solido richiesto è formato dal cilindro con raggio di base AC=AF=r e altezza AH e dal cono con raggio di base DH=r e altezza HE.

Risulta:

$$HE = DH \cdot cotgx = r \cdot cotgx \ , \quad FE = DE = \frac{DH}{senx} = \frac{r}{senx} \ , \quad FH = FE - HE =$$

$$= \frac{r}{senx} - r \cdot cotgx = \frac{r}{senx} - r\frac{cosx}{senx} = \frac{r(1 - cosx)}{senx} \quad , \quad AH = AF + FH = r + \frac{r(1 - cosx)}{senx} =$$

$$= \frac{r(senx + 1 - cosx)}{senx}$$

$$V(cilindro) = \pi \cdot AC^2 \cdot AH = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{r(senx + 1 - cosx)}{senx} = \pi r^3 \cdot \frac{senx + 1 - cosx}{senx}$$

$$V(cono) = \frac{1}{3}\pi \cdot DH^2 \cdot HE = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \ r \cdot cotgx = \ \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot cotgx$$

Il volume del solido è quindi:

$$V = \ \pi r^3 \cdot \frac{senx + 1 - cosx}{senx} + \frac{1}{3}\pi \cdot r^3 \cdot cotgx = \pi r^3 \left(\frac{senx + 1 - cosx}{senx} + \frac{cosx}{3senx}\right) =$$

$= \pi r^3 \left(\frac{3senx+3-3cosx+cosx}{3senx}\right) = \ \pi r^3 \left(\frac{3senx+3-2cosx}{3senx}\right)$ che è minimo se lo è:

$$y = \frac{3senx + 3 - 2cosx}{3senx} \quad , \quad con \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2}$$

$$y' = \left(-\cos(x)+\frac{2}{3}\right)\left(\mathrm{cosec}(x)\right)^2 \ge 0 \quad se \quad \left(-\cos(x)+\frac{2}{3}\right) \ge 0 \ \ , \ \ cosx \le \frac{2}{3}$$

Quindi la funzione è crescente se $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$, con $\alpha = arccos(2/3)$ ed è decrescente se

$0 < x < \alpha$: quindi $\alpha = arccos(2/3)$ è punto di minimo relativo (e assoluto).

Il volume del solido è quindi minimo se:

$x = arccos(2/3) \cong 0.841\, rad \cong 48.19° \cong 48°11'$

QUESITO 3

Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

Poiché $x^2 + 2x + 2 > 0 \quad \forall x$, il dominio della funzione è $-\infty < x < +\infty$; la curva non potrà avere asintoti obliqui (è continua in tutto il suo dominio).

Analizziamo i limiti all'infinito.

$\lim_{x\to-\infty}\left(-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = +\infty$; vediamo se ha asintoto obliquo:

Per $x \to -\infty$ risulta $f(x) \sim -x + |x| = -2x$, quindi $m = -2$;

$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)\cdot\left(x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)}{x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 2)}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x} = 0 = q\,.$$

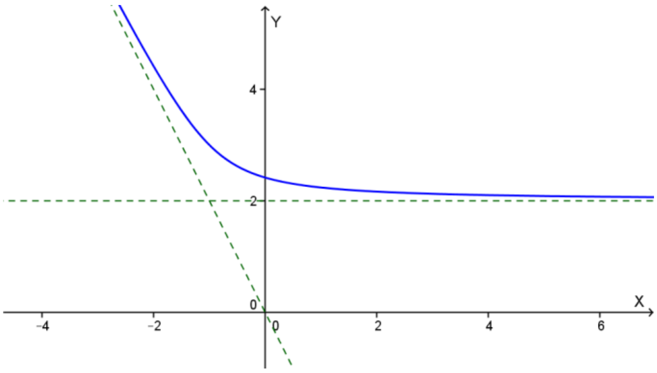
Quindi per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo di equazione $y = -2x$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = [F.I.\ \infty - \infty]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)\left(-x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)}{-x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(-x+1)^2 - (x^2 + 2x + 2)}{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x - 1}{-2x} = 2$$

Quindi per $x \to +\infty$ c'è l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$.



QUESITO 4

Si calcoli il limite della funzione: $\frac{cosx - cos2x}{1 - cosx}$ *, quando x tende a 0.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{cosx - cos2x}{1 - cosx} = \left[F.I. \quad \frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cosx - cos2x}{1 - cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{cosx - 2\cos^2 x + 1}{1 - cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{(2cosx + 1)(1 - cosx)}{1 - cosx} =$$

$$\lim_{x \to 0}(2cosx + 1) = 3$$

QUESITO 5

Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ *nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.*

Il valor medio f(c) è dato da:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} = \int_0^1 log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx = \int (x)' \cdot log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx =$$

$$\int \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx = x \log\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) - \sqrt{x^2 + 1} + \text{constant}$$

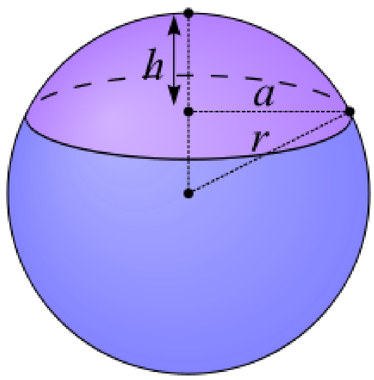
Quindi:

$$\int_0^1 log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = \left[x\cdot log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 =$$
$$= \left(log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}\right)-(-1) =$$

$$= log(1+\sqrt{2})+1-\sqrt{2} \cong 0.4672 = valor\ medio$$

QUESITO 6

Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.



Ricordiamo che l'area della calotta di altezza h della sfera di raggio r è uguale a:

$$A = 2\pi rh$$

Le due calotte individuate dal piano secante hanno aree:

$A = 2\pi rh$ e $A' = 2\pi(2r-h),\ \ consideriamo\ \ 0 \le h \le r$

Il circolo massimo ha area: πr^2 .

Dovrà essere:

$$2\pi rh : \pi r^2 = \pi r^2 : 2\pi r(2r-h) \quad \Longrightarrow \quad \pi^2 r^4 = 4\pi^2 r^2 h(2r-h) \quad \Longrightarrow \quad r^2 = 4h(2r-h)$$

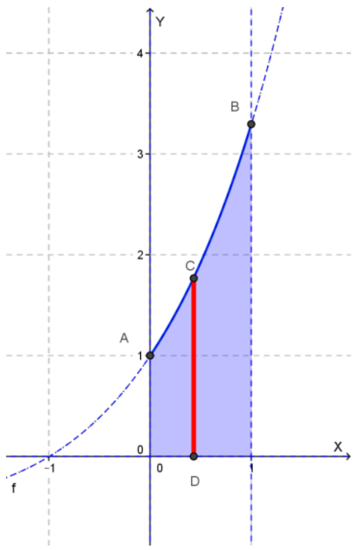
$$4h^2 - 8rh + r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{r(2\pm\sqrt{3})}{2}, \quad h_1 = \frac{r(2-\sqrt{3})}{2} \cong 0.13\, r \ ,\ h_2 = \frac{r(2+\sqrt{3})}{2} \cong 1.87\, r$$

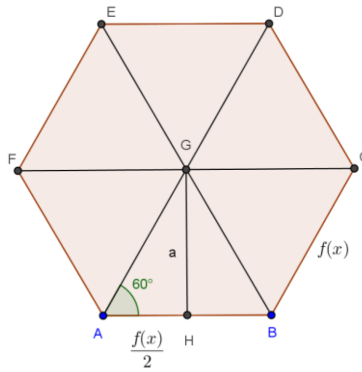
Le due calotte hanno quindi altezze $h_1 = \frac{r(2-\sqrt{3})}{2} \cong 0.13\, r$ e $h_2 = \frac{r(2+\sqrt{3})}{2} \cong 1.87\, r$.

QUESITO 7

La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$ *e dall'asse x nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1 è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.*

Tracciamo un grafico qualitativo della funzione: $y = e^{\frac{x}{2}}(x+1)$.





Il volume richiesto è dato da:

$V = \int_0^1 A(x)dx$, dove $A(x)$ è l'area dell'esagono regolare di lato $CD = f(x)$.

L'apotema a dell'esagono è data da: $a = f(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi:

$A(x) = p \cdot a = 3f(x) \cdot f(x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \left(f(x)\right)^2$. Quindi:

$$V = \int_0^1 A(x)dx = V = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \left(f(x)\right)^2 dx = = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \int_0^1 \left(e^{\frac{x}{2}}(x+1)\right)^2 dx =$$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \int_0^1 e^x(x+1)^2 dx$; cerchiamo, integrando per parti, una primitiva di $e^x(x+1)^2$.

$$= \int e^x(x+1)^2 dx = \int (e^x)'(x+1)^2 dx = e^x\,(x+1)^2 - \int e^x \cdot \left(2(x+1)\right)dx =$$

$$= e^x(x+1)^2 - 2\left[\int (e^x)' \cdot (x+1)dx\right] = e^x(x+1)^2 - 2\left[e^x(x+1) - \int e^x dx\right] =$$

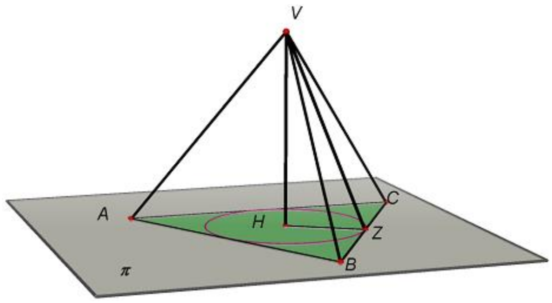
$= e^x(x+1)^2 - 2e^x(x+1) + 2e^x + k = e^x(x^2+1) + k$

Quindi:

$$V = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \int_0^1 e^x(x+1)^2 dx = \frac{3}{2}\sqrt{3}[e^x(x^2+1)]_0^1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}(2e-1)\ u^3 \cong 11.527\ u^3$$

QUESITO 8

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.



Il triangolo di base ABC è equilatero; sia l il suo lato. Risulta:

$$HZ = \frac{1}{3}AZ = \frac{1}{3}\left(l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}l\sqrt{3} \qquad (H\ \text{è}\ anche\ baricentro, quindi\ AH = 2HZ)$$

Il rapporto fra apotema è spigolo di base è dato da: $\frac{VZ}{BC} = \frac{VZ}{2BZ} = \frac{1}{2}\frac{VZ}{BZ} = \frac{1}{2}tg(V\hat{B}Z) = k$

L'angolo è compreso fra 30° (quando V=H , piramide di altezza nulla) e 90° (quando l'altezza tende all'infinito); quindi:

$$30° \le V\hat{B}Z < 90° \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \le tg(V\hat{B}Z) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \le \frac{1}{2}tg(V\hat{B}Z) < +\infty$$

Pertanto deve essere: $k \ge \frac{\sqrt{3}}{6}$.

QUESITO 9

Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione: $f(x) = (x^2+1)^{senx}$ *nel punto P di ascissa* $x = \pi/2$.

La tangente richiesta ha equazione: $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Calcoliamo la derivata della funzione, che riscriviamo nel seguente modo:

$$f(x) = (x^2+1)^{senx} = e^{ln(x^2+1)^{senx}} = e^{senx\ln(x^2+1)}$$

$$f'(x) = e^{senx\ln(x^2+1)}\left[(cosx)\ln(x^2+1) + senx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right]$$

Pertanto: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\left[\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}+1}\right] = \frac{\pi^2+4}{4} \cdot \frac{4\pi}{\pi^2+4} = \pi$.

Essendo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}+1$, la tangente ha equazione:

$$y - \frac{\pi^2}{4} - 1 = \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \pi x + 1 - \frac{\pi^2}{4}$$

QUESITO 10

Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1+t^2, 1+t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

Il luogo ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1+t^2 \geq 1 \\ y = 1+t^2 \geq 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = x \quad con\ x \geq 1\ e\ y \geq 1$$

L'insieme dei punti $P(1+t^2, 1+t^2)$ rappresenta una semiretta: